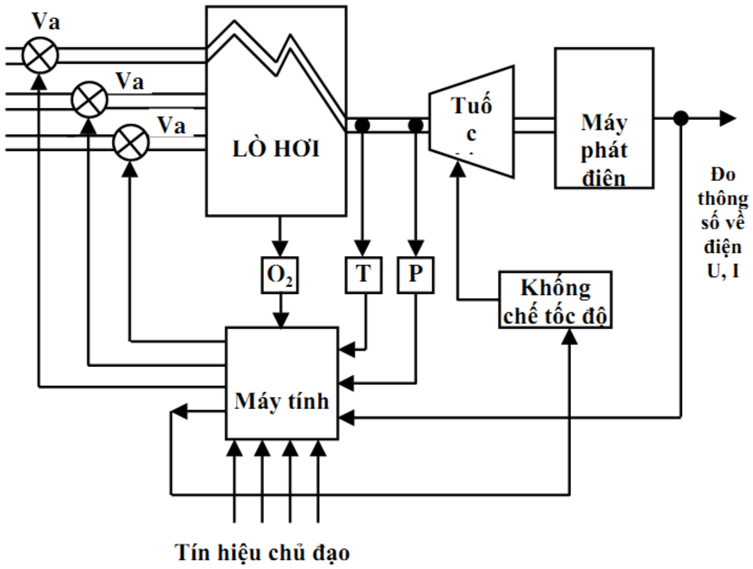
LÝ THUYẾT ĐIỀU KHIỂN TỰ ĐỘNG

CHƯƠNG 1: MÔ TẢ MỘT HỆ THỐNG ĐIỀU KHIỂN TỰ ĐỘNG

1.1. Các khái niệm cơ bản

Để hiểu được khái niệm về hệ thống điều khiển tự động trước hết ta xem ví dụ sau:



Hình 1.1: Sơ đồ điều khiển của lò hơi để phát điện

Điều khiển: Tập hợp tất cả các tác động có mục đích nhằm điều khiển một quá trình này hay quá trình kia theo một quy luật hay một chương trình cho trước.

Điều khiển học: Một bộ môn khoa học nghiên cứu nguyên tắc xây dựng các hệ điều khiển.

Điều khiển tự động: Quá trình điều khiển hoặc điều chỉnh được thực hiện mà không có sự tham gia trực tiếp của con người.

Hệ thống điều khiển: Tập hợp tất cả các thiết bị mà nhờ đó quá trình điều khiển được thực hiện.

Hệ thống điều khiển tự động (điều chỉnh tự động): Tập hợp tất cả các thiết bị kỹ thuật, đảm bảo điều khiển hoặc điều chỉnh tự động một quá trình nào đó (đôi khi gọi tắt là hệ thống tự động – HTTĐ).

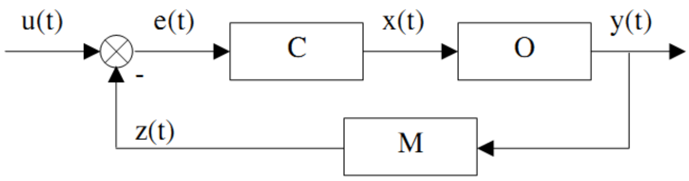
Ý nghĩa của điều khiển tự động:

- Đáp ứng của hệ thống không thõa mãn yêu cầu công nghệ
- Tăng độ chính xác
- Tăng năng suất
- Tăng hiệu quả kinh tế

1.2. Các phần tử cơ bản của hệ thống điều khiển tự động

1.2.1. Các phần tử cơ bản

Sơ đồ tổng quát của hệ thống điều khiển tự động



Hình 1.2: Sơ đồ tổng quát hệ thống điều khiển tự động

Mọi hệ thống điều khiển tự động đều bao gồm 3 bộ phận cơ bản :

- Thiết bị điều khiển C (Controller device).
- Đối tượng điều khiển (Object device).
- Thiết bị đo lường (Measuring device).

Trong đó: u(t) tín hiệu vào ; r(t)
e(t) Sai lệch điều khiển ;
x(t) Tín hiệu điều khiển ;
y(t) Tín hiệu ra ; c(t)
z(t) Tín hiệu phản hồi (hồi tiếp)

1.2.2. Bài toán cơ bản trong lĩnh vực điều khiển tự động

- Phân tích hệ thống: Cho hệ thống tự động đã biết cấu trúc và thông số. Bài toán đặt ra là tìm đáp ứng của hệ thống và đánh giá chất lượng của hệ.

- Thiết kế hệ thống: Biết cấu trúc và thông số của đối tượng điều khiển. Bài toán đặt ra là thiết kế bộ điều khiển để được hệ thống thỏa mãn các yêu cầu về chất lượng.

- Nhận dạng hệ thống: Chưa biết cấu trúc và thông số của hệ thống. Vấn đề dặt ra là xác định cấu trúc và thông số của hệ thống.

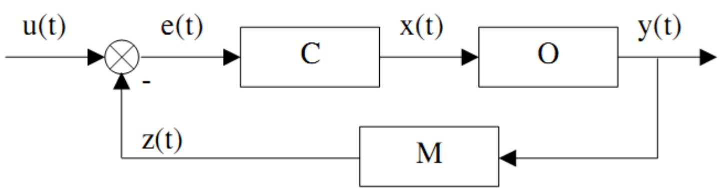
Môn học Lý thuyết ĐKTĐ chỉ giải quyết bài toán phân tích hệ thống và thiết kế hệ thống. Bài toán nhận dạng hệ thống sẽ được nghiên cứu trong môn học khác.

1.3. Các nguyên tắc điều khiển cơ bản

1.3.1. Nguyên tắc thông tin phản hồi (1)

Muốn hệ thống điều khiển có chất lượng cao thì bắt buộc phải có phải hồi thông tin, tức phải có đo lường các tín hiệu từ đối tượng điều khiển.

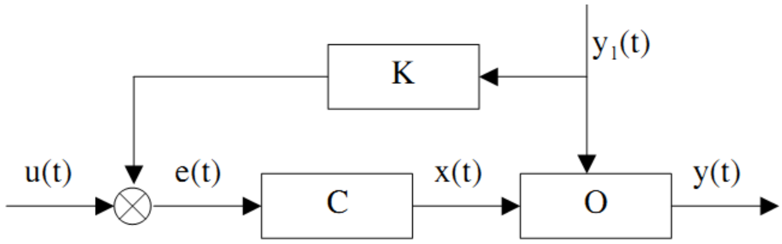
- Điều khiển san bằng sai lệch



Hình 1.3: Sơ đồ nguyên tắc điều khiển theo sai lệch

Tín hiệu ra y(t) được đưa vào so sánh với tín hiệu vào u(t) nhằm tạo nên tín hiệu tác động lên đầu vào bộ điều khiển C nhằm tạo tín hiệu điều khiển đối tượng O.

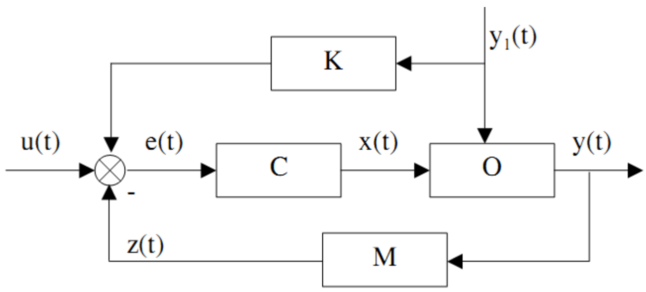
- Điều khiển theo bù nhiễu



Hình 1.4: Sơ đồ nguyên tắc điều khiển bù nhiễu

Nguyên tắc bù nhiễu là sử dụng thiết bị bù K để giảm ảnh hưởng của nhiễu là nguyên nhân trực tiếp gây ra hậu quả cho hệ thống (hình 1.4).

- Nguyên tắc điều khiển hỗn hợp (theo sai lệch và bù nhiễu)



Hình 1.5: Sơ đồ nguyên tắc điều khiển hỗn hợp

Nguyên tắc điều khiển hỗn hợp là phối hợp cả hai nguyên tắc trên, vừa có hồi tiếp theo sai lệch vừa dùng các thiết bị để bù nhiễu.

1.3.2. Nguyên tắc đa dạng tương xứng

Muốn quá trình điều khiển có chất lượng thì sự đa dạng của bộ điều khiển phải tương xứng với sự đa dạng của đối tượng. Tính đa dạng của bộ điều khiển thể hiện ở khả năng thu thập thông tin, lưu trữ thông tin, truyền tin, phân tích xử lý, chọn quyết định,...

Ý nghĩa: Cần thiết kế bộ điều khiển phù hợp với đối tượng.

Thí dụ: Hãy so sánh yêu cầu chất lượng điều khiển và bộ điều khiển sử dụng trong các hệ thống sau:

- Điều khiển nhiệt độ bàn là (chấp nhận sai số lớn) với điều khiển nhiệt độ lò sấy (không chấp nhận sai số lớn).

- Điều khiển mực nước trong bồn chứa của khách sạn (chỉ cần đảm bảo luôn có nước trong bồn) với điều khiển mực chất lỏng trong các dây chuyền sản xuất (mực chất lỏng cần giữ không đổi).

1.3.3. Nguyên tắc bổ sung ngoài

Một hệ thống luôn tồn tại và hoạt động trong môi trường cụ thể và có tác động qua lại chặt chẽ với môi trường đó. Nguyên tắc bổ sung ngoài thừa nhận có một đối tượng chưa biết (hộp đen) tác động vào hệ thống và ta phải điều khiển cả hệ thống lẫn hộp đen.

Ý nghĩa: Khi thiết kế hệ thống tự động, muốn hệ thống có có chất lượng cao thì không thể bỏ qua nhiễu

1.3.4. Nguyên tắc dự trữ

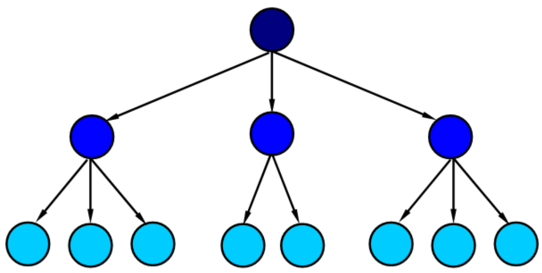
Vì nguyên tắc 3 luôn coi thông tin chưa đầy đủ phải đề phòng các bất trắc xảy ra và không được dùng toàn bộ lực lượng trong điều kiện bình thường. Vốn dự trữ không sử dụng, nhưng cần để đảm bảo cho hệ thống vận hành an toàn.

1.3.5. Nguyên tắc phân cấp

Một hệ thống điều khiển phức tạp cần xây dựng nhiều lớp điều khiển bổ sung cho trung tâm. Cấu trúc phân cấp thường sử dụng là cấu trúc hình cây.

Đa số hệ thống điều khiển trong các dây chuyền sản suất hiện nay có thể chia làm 3 cấp:

- Cấp thực thi: điều khiển thiết bị, đọc tín hiệu từ cảm biến.
- Cấp phối hợp
- Cấp tổ chức và quản lý



1.3.6. Nguyên tắc cân bằng nội

Mỗi hệ thống cần xây dựng cơ chế cân bằng nội để có khả năng tự giải quyết những biến động xảy ra.

1.4. Phân loại các hệ thống điều khiển tự động

1.4.1. Phân loại dựa trên mô tả toán học của hệ thống

Hệ thống liên tục: Hệ thống liên tục được mô tả bằng phương trình vi phân.

Hệ thống rời rạc: Hệ thống rời rạc được mô tả bằng phương trình sai phân.

Hệ thống tuyến tính: hệ thống được mô tả bởi hệ phương trình vi phân/sai phân tuyến tính.

Hệ thống phi tuyến: Hệ thống mô tả bởi hệ phương trình vi phân/sai phân phi tuyến.

Hệ thống bất biến theo thời gian: hệ số của phương trình vi phân/ sai phân mô tả hệ thống không đổi.

Hệ thống biến đổi theo thời gian: hệ số của phương trình vi phân/ sai phân mô tả hệ thống thay đổi theo thời gian.

1.4.2. Phân loại dựa trên số ngõ vào – ngõ ra hệ thống

Hệ thống một ngõ vào – một ngõ ra (hệ SISO): (Single Input –Single Output).

Hệ thống nhiều ngõ vào – nhiều ngõ ra (hệ MIMO): (Multi Input – Multi Output).

1.4.3. Phân loại theo chiến lược điều khiển.

Mục tiêu điều khiển thường gặp nhất là sai số giữa tín hiệu ra và tín hiệu vào chuẩn càng nhỏ càng tốt. Tùy theo dạng tín hiệu vào mà ta có các loại điều khiển sau:

Điều khiển ổn định hóa: Nếu tín hiệu chuẩn x(t) = const, ta gọi là điều khiển ổn định hóa.

Điều khiển theo chương trình: Tín hiệu vào x(t) là hàm thay đổi theo thời gian nhưng đã biết trước.

Điều khiển theo dõi: Tín hiệu vào x(t) là hàm không biết trước theo thời gian.

1.4.4. Lịch sử phát triển lý thuyết điều khiển

a. Điều khiển kinh điển:

Mô tả toán học dùng để phân tích và thiết kế hệ thống là hàm truyền.

Đặc điểm:

- Đơn giản
- Áp dụng thuận lợi cho hệ thống tuyến tính bất biến một ngõ vào, một ngõ ra.
- Kỹ thuật thiết kế trong miền tần số.

Các phương pháp phân tích và thiết kế hệ thống:

- Quỹ đạo nghiệm số.
- Đặc tính tần số: biểu đồ Nyquist, biểu đồ Bode.

Bộ điều khiển:

- Sớm trễ pha
- PID (Proportional – Integral – Derivative)

b. Điều khiển hiện đại:

Mô tả toán học dùng để phân tích và thiết kế hệ thống là phương trình trạng thái.

Đặc điểm: Có thể áp dụng cho hệ thống phi tuyến, biến đổi theo thời gian, nhiều ngõ vào, nhiều ngõ ra. Kỹ thuật thiết kế trong miền thời gian

Các phương pháp thiết kế hệ thống:

- Điều khiển tối ưu.
- Điều khiển thích nghi.
- Điều khiển bền vững

Bộ điều khiển: Hồi tiếp trạng thái

c. Điều khiển thông minh:

Nguyên tắc không cần dùng mô hình toán học để thiết kế hệ thống.

Đặc điểm:

- Mô phỏng (bắt chước) các hệ thống thông minh sinh học.
- Bộ điều khiển có khả năng xử lý thông tin không chắc chắn, có khả năng học, có khả năng xử lý lượng lớn thông tin.

Các phương pháp điều khiển thông minh:

- Điều khiển mờ (Fuzzy Control).
- Mạng thần kinh nhân tạo (Neural Network).
- Thuật toán di truyền (Genetic Algorithm).

Nội dung chính của môn học Lý thuyết Điều khiển tự động chủ yếu đề cấp đến các phương pháp kinh điển phân tích, thiết kế hệ thống tuyến tính, bất biến, một ngõ vào, một ngõ ra. Do vậy kiến thức có được từ môn học giúp kỹ sư có thể phân tích, thiết kế hệ thống điều khiển ở cấp thực thi (cấp điều khiển thiết bị trong hệ thống điều khiển phân cấp).

1.5. Quá trình thiết lập một hệ thống điều khiển

- Bước 1: Chuyển đổi các yêu cầu kỹ thuật thành một hệ thống vật lý.
- Bước 2: Vẽ sơ đồ khối chức năng. Chuyển đổi sự miêu tả đặc tính hệ thống thành một sơ đồ khối chức năng. Đây là sự miêu tả về các phần chi tiết của hệ thống và mối quan hệ giữa chúng.
- Bước 3: Thiết lập sơ đồ nguyên lí.
- Bước 4: Sử dụng sơ đồ nguyên lý thiết lập sơ đồ khối hoặc graph tín hiệu hoặc biểu diễn không gian trạng thái.
- Bước 5: Rút gọn sơ đồ khối.
- Bước 6: Phân tích và thiết kế.

Câu hỏi ôn tập chương 1

1. Hệ thống điều khiển tự động có thể phân loại như thế nào?
2. Hệ thống điều khiển có mấy phần tử cơ bản?
3. Hãy nêu các quy tắc điều khiển cở bản để điều khiển một hệ thống điều khiển?
4. Nêu các bước thiết lập một hệ thống điều khiển?

CHƯƠNG 2: MÔ HÌNH TOÁN HỌC CỦA HỆ THỐNG ĐIỀU KHIỂN

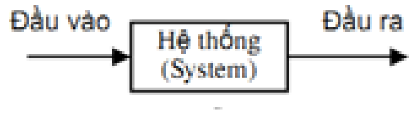
2.1. Khái niệm về mô hình toán học

2.1.1. Mô hình toán học ở dạng phương trình vi phân

Hệ thống điều khiển thực tế rất đa dạng và có bản chất vật lý khác nhau do đó cần có cơ sở toán học chung để phân tích, thiết kế các hệ thống điều khiển có bản chất vật lý khác nhau.

Tín hiệu đầu vào u(t) và tín hiệu đầu ra y(t) thường là các hàm số theo thời gian.

Quan hệ giữa tín hiệu vào và tín hiệu ra của một hệ thống tuyến tính bất biến liên tục có thể mô tả bằng phương trình vi phân tuyến tính hệ số hằng:



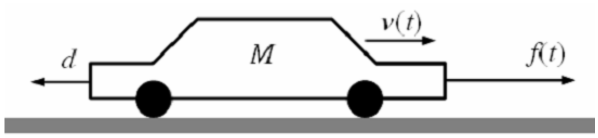
$$a_0\frac{d^n y}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+...+a_{n-1}\frac{dy}{dt}+a_n y(t)=b_0\frac{d^m x}{dt^m}+b_{m-1}\frac{d^{m-1}x}{dt^{m-1}}+...+b_{m-1}\frac{dx}{dt}+b_m x(t)$$

Trong đó: n - bậc của hệ thống, hệ thống hợp thức nếu n ≥ m.

ai, bi - thông số của hệ thống

2.1.2. Một số ví dụ mô tả hệ thống bằng phương trình vi phân

- Đặc tính động học tốc độ xe ô tô



Phương trình động học của tốc độ xe ô tô theo lực kéo của động cơ

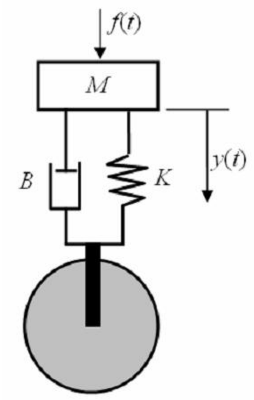
$$M\frac{dv(t)}{dt}+B.v(t)=f(t)$$

Trong đó: M - khối lượng xe, B - hệ số ma sát: thông số của hệ thống

f(t) - lực kéo của động cơ: tín hiệu vào

v(t) - tốc độ xe: tín hiệu ra

- Đặc tính động học hệ thống giảm chấn của xe



Phương trình động học hệ thống

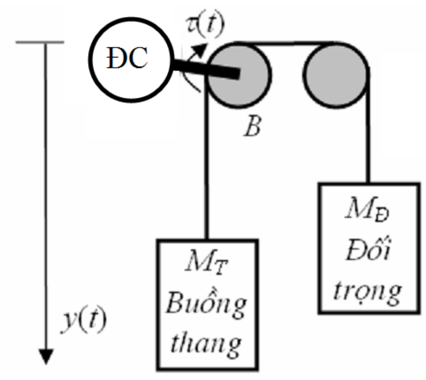
$$M\frac{d^2y(t)}{dt^2}+B\frac{dy(t)}{dt}+K.y(t)=f(t)$$

Trong đó: M - khối lượng tác động lên bánh xe, B hệ số ma sát, K độ cứng lò xo (thông số hệ thống)

f(t) - lực do sốc: tín hiệu vào

y(t) - dịch chuyển của thân xe: tín hiệu ra

- Đặc tính động học thang máy



Phương trình động học hệ thống

$$M_T\frac{d^2y(t)}{dt^2}+B\frac{dy(t)}{dt}+M_T.g=K.\tau(t)+M_Đ.g$$

Trong đó: MT - khối lượng buồng thang, MĐ - khối lượng đối trọng,

B - hệ số ma sát, K - hệ số tỉ lệ

τ(t) - moment kéo của động cơ: tín hiệu vào

y(t) - vị trí buồng thang: tín hiệu ra

Qua các ví dụ trên ta có thể thấy rằng hầu hết các hệ thống điều khiển tự động đều được mô tả bằng các phương trình động học là các phương trình vi phân bậc 1, 2, … n

Phương trình vi phân bậc n (n > 2) rất khó giải

Phân tích hệ thống dựa vào mô hình toán là phương trình vi phân gặp rất nhiều khó khăn (một thí dụ đơn giản là biết tín hiệu vào, cần tính đáp ứng của hệ thống, nếu giải phương trình vi phân thì không đơn giản). Thiết kế hệ thống dựa vào phương trình vi phân hầu như không thể thực hiện được trong trường hợp tổng quát.

Trong thực tế cần các dạng mô tả toán học khác giúp phân tích và thiết kế hệ thống tự động dễ dàng hơn: Hàm truyền, Phương trình trạng thái.

2.2. Hàm truyền

2.2.1. Biến đổi Laplace

a. Khái niệm và tính chất của phép biến đổi Laplace

Khi sử dụng các phép biến đổi tín hiệu hệ thống từ miền thời gian sang miền khác để thuận tiện trong việc xử lý tín hiệu. Như trong hệ thống liên tục người ta hay sử dụng phép biến đổi Laplace để biến đổi từ miền thời gian sang miền tần số phức. Các phương trình vi tích phân sẽ chuyển đổi thành các phương trình đại số thông thường.

Trong các hệ thống rời rạc người ta hay sử dụng phép biến đổi Z để chuyển tín hiệu từ miền thời gian sang miền tần số phức. Trong thực tế người ta còn sử dụng các phép biến đổi khác để xử lý tín hiệu như giải tương quan, mã hoá có hiệu quả, chống nhiễu,….

Thực hiện các phép biến đổi có công cụ toán học như máy tính số, công cụ phổ biến và hiệu quả là phần mềm Matlab hay thực hiện biến đổi bằng tay.

- Khái niệm: Cho hàm f(t) là hàm xác định với t ≥ 0, biến đổi Laplace của hàm f(t) là:

$$F(s) = L\{f(x)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt \qquad (2.7)$$

trong đó: s – biến phức (biến Laplace)

L – toán tử biến đổi Laplace

e^{-st} – là hạt nhân của phép biến đổi

F(s) – hàm phức

f(t) – hàm biểu diễn trên miền thời gian xác định trên R.

Để thực hiện được biến đổi Laplace hàm f(t) phải là hàm thực và thoả mãn một số điều kiện sau:

1. f(t) = 0 khi t < 0

2. f(t) liên tục khi t ≥ 0, trong khoảng hữu hạn bất kỳ cho trước chỉ có hữu hạn các điểm cực trị.

3. Tích phân $I = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$ hội tụ.

- Tính chất :

Giả thiết f(t) và g(t) là hai hàm theo thời gian có biến đổi Laplace tương ứng:

$L\{f(t)\} = F(s) \qquad L\{g(t)\} = G(s)$

Tính tuyến tính

$$L\{a.f(t) + b.g(t)\} = a.F(s) + b.G(s)$$

Định lý chậm trễ

$$L\{f(t-T)\} = e^{-Ts}F(s)$$

Ảnh của đạo hàm

$$L\left\{\frac{d(f(t))}{dt}\right\} = s.F(s) + F(0^+)$$

Ảnh của tích phân

$$L\left\{\int_0^\infty f(t)dt\right\} = \frac{F(s)}{s}$$

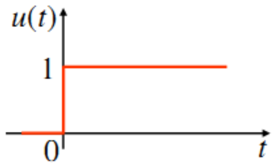
Định lý giá trị cuối

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} s.F(s)$$

b. Biến đổi Laplace của các hàm cơ bản:

- Hàm nấc đơn vị (step): tín hiệu vào hệ thống điều khiển ổn định hóa

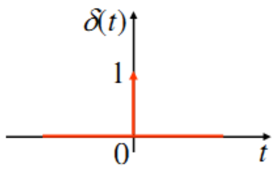
$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } t \ge 0 \\ 0 & \text{nếu } t < 0 \end{cases}$$



Biến đổi Laplace của u(t) $\quad L\{u(t)\} = \frac{1}{s}$

- Hàm dirac: thường dùng để mô tả nhiễu

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } t \ne 0 \\ \infty & \text{nếu } t = 0 \end{cases}$$

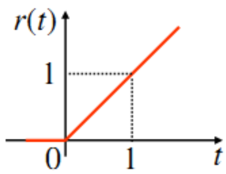


Biến đổi Laplace của δ(t) $\quad L\{\delta(t)\} = 1$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1$$

- Hàm dốc đơn vị (Ramp): tín hiệu vào hệ thống điều khiển theo dõi

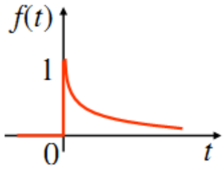
$$r(t) = tu(t) = \begin{cases} t & \text{nếu } t \ge 0 \\ 0 & \text{nếu } t < 0 \end{cases}$$



Biến đổi Laplace của r(t) $\quad L\{t.u(t)\} = \frac{1}{s^2}$

- Hàm mũ

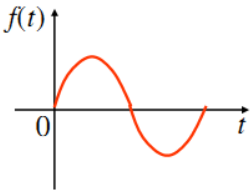
$$f(t)=e^{-at}.u(t)=\begin{cases} e^{-at} & \text{nếu } t\ge 0 \\ 0 & \text{nếu } t<0 \end{cases}$$



Biến đổi Laplace $L\{e^{-at}.u(t)\}=\dfrac{1}{s+a}$

- Hàm sin

$$f(t)=(\sin\omega t).u(t)=\begin{cases} \sin\omega t & \text{nếu } t\ge 0 \\ 0 & \text{nếu } t<0 \end{cases}$$



Biến đổi Laplace $L\{(\sin\omega t).u(t)\}=\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$

Bảng biến đổi Laplace của các hàm cơ bản

TT	f(t)	F(s)	TT	f(t)	F(s)
1	$\delta(t)$	1	14	$e^{-at}\sin\omega t$	$\dfrac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
2	$u(t)$	$\dfrac{1}{s}$	15	$e^{-at}\cos\omega t$	$\dfrac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$
3	t	$\dfrac{1}{s^2}$	16	$\sinh\omega t$	$\dfrac{\omega}{s^2-\omega^2}$
4	$\dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!}, n\in Z$	$\dfrac{1}{s^n}$	17	$\cosh\omega t$	$\dfrac{s}{s^2-\omega^2}$
5	e^{at}	$\dfrac{1}{s-a}$	18	$\dfrac{df(t)}{dt}$	$s.F(s)+f(0_{0+})$
6	$t.e^{at}$	$\dfrac{1}{(s-a)^2}$	19	$\dfrac{d^2f(t)}{dt^2}$	$s^2.F(s)-f(0_{0+})-\dfrac{df(0)}{dt}$
7	$\dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{at}, n\in Z$	$\dfrac{1}{(s-a)^n}$	20	$\dfrac{d^nf(t)}{dt^n}$	$s^n.F(s)-f(0_{0+})-\dfrac{d^nf(0)}{dt^n}-\dots-\dfrac{df(0)}{dt}$
8	$1-e^{at}$	$\dfrac{-a}{s(s-a)}$	21	$\int_{-\infty} t.dt$	$\dfrac{F(s)}{s}+\dfrac{f^{-1}(0)}{s}$
9	$\dfrac{1}{a-b}(e^{at}-e^{bt})$	$\dfrac{1}{(s-a)(s-b)}$	22	$f(t-\tau).u(t-\tau))$	$a^{-st}F(s)$

10	$\sin\omega t$	$\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$	23	$a.f_1(t)+b.f_2(t)$	$a.F_1(s)+b.F_2(s)$
11	$\cos\omega t$	$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$	24	$e^{-at}f(t)$	$F(s+a)$
12	$\sin(\omega t+\theta)$	$\dfrac{s.\sin\theta+\omega.\cos}{s^2+\omega^2}$	25	$t.f(t)$	$-\dfrac{dF(s)}{ds}$
13	$\cos(\omega t+\theta)$	$\dfrac{s.\cos\theta-\omega.\sin}{s^2+\omega^2}$			

Ghi chú: Sử dụng bảng phải nhân với hàm u(t), hay thỏa mãn điều kiện f(t) = 0 khi t < 0

2.2.2. Hàm truyền

a. Khái niệm

Xét hệ thống tuyến tính bất biến liên tục, mô tả bởi phương trình vi phân:

$$a_0\frac{d^nc(t)}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}c(t)}{dt^{n-1}}+\ldots+a_{n-1}\frac{dc(t)}{dt}+a_nc(t)=$$
$$=b_0\frac{d^mr(t)}{dt^m}+b_1\frac{d^{m-1}r(t)}{dt^{m-1}}+\ldots+b_{m-1}\frac{dr(t)}{dt}+b_mr(t)$$

Biến đổi Laplace 2 vế phương trình trên, để ý tính chất ảnh của đạo hàm, giả thiết điều kiện đầu bằng 0, ta được:

$$a_0s^nC(s)+a_{n-1}s^{n-1}C(s)+\ldots+a_{n-1}sC(s)+a_nC(s)$$
$$=b_0s^mR(s)+b_{m-1}s^{m-1}R(s)+\ldots+b_{m-1}sR(s)+b_mR(s)$$

Hàm truyền của hệ thống:

$$G(s)=\frac{a_0s^nC(s)+a_{n-1}s^{n-1}C(s)+\ldots+a_{n-1}sC(s)+a_nC(s)}{b_0s^mR(s)+b_{m-1}s^{m-1}R(s)+\ldots+b_{m-1}sR(s)+b_mR(s)}$$

Định nghĩa: Hàm truyền của hệ thống là tỉ số giữa biến đổi Laplace của tín hiệu ra và biến đổi Laplace của tín hiệu vào khi điều kiện đầu bằng 0.

Chú ý: Mặc dù hàm truyền được định nghĩa là tỉ số giữa biến đổi Laplace của tín hiệu ra và biến đổi Laplace của tín hiệu vào nhưng hàm truyền không phụ thuộc vào tín hiệu ra và tín hiệu vào mà chỉ phụ thuộc vào cấu trúc và thông số của hệ thống. Do đó có thể dùng hàm truyền để mô tả hệ thống.

b. Cách tìm hàm truyền

Bước 1: Thành lập phương trình vi phân mô tả quan hệ vào – ra của phần tử bằng cách:

- Áp dụng các định luật Kirchoff, quan hệ dòng – áp trên điện trở, tụ điện, cuộn cảm,… đối với các phần tử điện.

- Áp dụng các định luật Newton, quan hệ giữa lực ma sát và vận tốc, quan hệ giữa lực và biến dạng của lò xo,… đối với các phần tử cơ khí.

- Áp dụng các định luật truyền nhiệt, định luật bảo toàn năng lượng,… đối với các phần tử nhiệt.

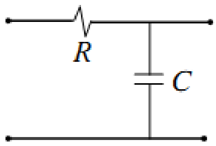
Bước 2: Biến đổi Laplace hai vế phương trình vi phân vừa thành lập ở bước 1, ta được hàm truyền cần tìm.

Chú ý: Đối với các mạch điện có thể tìm hàm truyền theo phương pháp tổng trở phức.

c. Hàm truyền của các bộ điều khiển (khâu hiệu chỉnh)

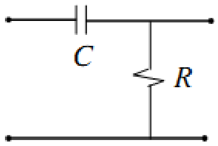
- Khâu hiệu chỉnh thụ động

+ Mạch tích phân bậc 1:



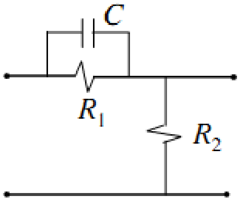
Hàm truyền: $G(s) = \dfrac{1}{RC.s + 1}$

+ Mạch vi phân bậc 1:



Hàm truyền: $G(s) = \dfrac{RC.s}{RC.s + 1}$

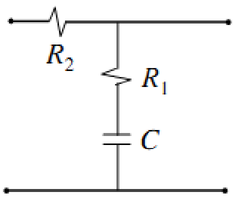
+ Mạch sớm pha:



Hàm truyền: $G(s) = K_C \dfrac{\alpha Ts + 1}{Ts + 1}$

Trong đó: $K_C = \dfrac{R_2}{R_1 + R_2}$; $T = \dfrac{R_1 R_2 C}{R_1 + R_2}$; $\alpha = \dfrac{R_1 + R_2}{R_2} > 1$

+ Mạch trễ pha:

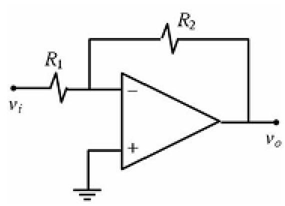


Hàm truyền: $G(s) = K_c \dfrac{\alpha Ts + 1}{Ts + 1}$

Trong đó: $K_c = 1$; $T = (R_1 + R_2)C$; $\alpha = \dfrac{R_2}{R_1 + R_2} < 1$

- Các khâu hiệu chỉnh tích cực

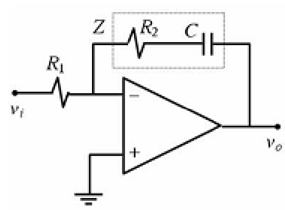
+ Khâu tỉ lệ P (Proportional)



Hàm truyền: $G(s) = K_p$

Trong đó: $K_p = -\dfrac{R_2}{R_1}$

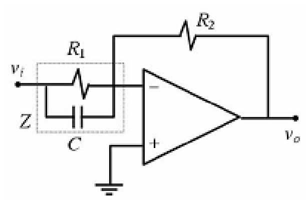
+ Khâu tích phân tỉ lệ PI: (Proportional Integral)



Hàm truyền: $G(s) = K_p + \dfrac{K_i}{s}$

Trong đó: $K_p = -\dfrac{R_2}{R_1}$ $K_i = -\dfrac{1}{R_1 C}$

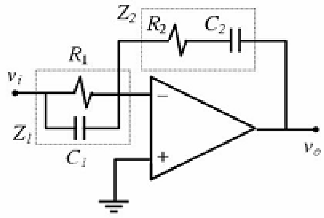
+ Khâu vi phân tỉ lệ PD: (Proportional Derivative)



Hàm truyền: $G(s) = K_p + K_d.s$

Trong đó: $K_p = -\dfrac{R_2}{R_1}$ $K_d = -R_2 C$

+ Khâu vi tích phân tỉ lệ PID: (Proportional Integral Derivative)

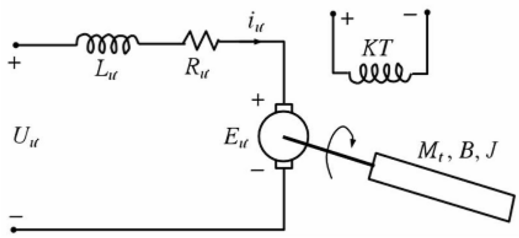


Hàm truyền: $G(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d.s$

Trong đó: $K_p = -\frac{R_2}{R_1}$; $K_i = -\frac{1}{R_1C}$; $K_d = -R_2C$

d. Hàm truyền của các đối tượng thường gặp

- Động cơ điện một chiều



- $L_ư$: điện cảm phần ứng
- $R_ư$: điện trở phần ứng
- $U_ư$: điện áp phần ứng
- $E_ư$: sức phản điện động
- ω : tốc độ động cơ
- M_t : moment tải
- B : hệ số ma sát
- J : moment quán tính

Áp dụng định luật Kirchoff cho mạch điện phần ứng:

$$U_u(t) = i_u(t)R_u + L_u\frac{di_u(t)}{dt} + E_u(t)$$

Trong đó: $E_u(t) = K.\Phi.\omega(t)$

K – hệ số

Φ – từ thông kích từ

Áp dụng định luật Newton cho chuyển động quay của trục động cơ:

$$M(t) = M_t(t) + B\omega(t) + J\frac{d\omega(t)}{dt}$$

Trong đó: $M(t) = K.\Phi.i_u(t)$

Biến đổi Laplace các phương trình trên ta được:

$$U_u(s) = I_u(s)R_u + L_u sI_u(s) + E_u(s)$$

$$E_u(s) = K.\Phi.\omega(s)$$

$$M(s) = M_t(s) + B\omega(s) + Js\omega(s)$$

$$M(s) = K.\Phi.I_u(s)$$

Đặt : $T_u = \frac{L_u}{R_u}$ - hằng số thời gian điện từ của động cơ

$T_c = \dfrac{J}{B}$ - hằng số thời gian điện cơ của động cơ

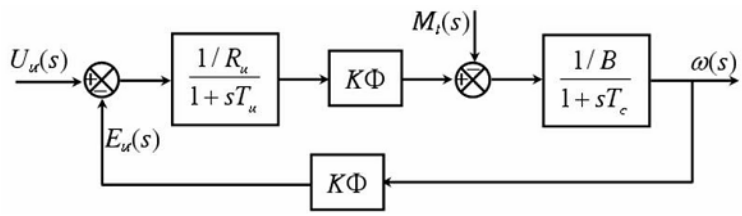
Thay vào các phương trình ta có hệ phương trình điện và động học của động cơ điện một chiều:

$$I_u(s) = \frac{U_u(s) - E_u(s)}{R_u(1 + sT_u)}$$

$$E_u(s) = K.\Phi.\omega(s)$$

$$\omega(s) = \frac{M(s) - M_t(s)}{B(1 + sT_c)}$$

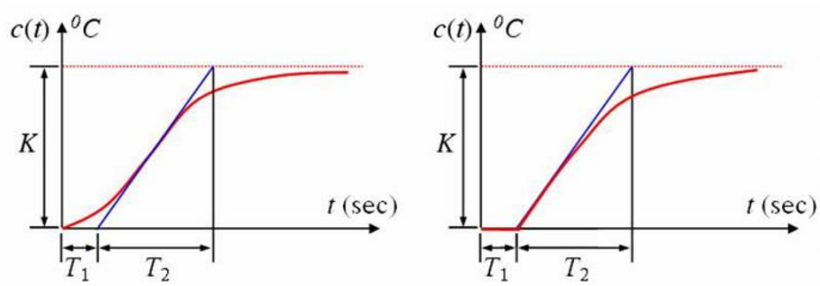
$$M(s) = K.\Phi.I_u(s)$$



Hình (): Sơ đồ khối của động cơ điện một chiều

- Hàm truyền lò nhiệt dùng điện trở gia nhiệt

Mô hình lò điện trở



a) b)

Đặc tính của lò điện trở a) chính xác b) gần đúng

Hàm truyền được xác định gần đúng theo:

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)}$$

Tín hiệu vào của hệ thống lò nhiệt ở dạng hàm nấc đơn vị (công suất trên điện trở 100%) $R(s) = \dfrac{1}{s}$

Tín hiệu ra của hệ thống gần đúng $c(t) = f(t - T_1)$

trong đó $f(t) = K(1 - e^{-t/T_2})$

Từ đây: $F(s) = \dfrac{K}{s(1+sT_2)}$

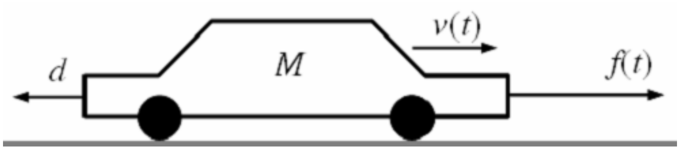
Áp dụng tính chất trễ của biến đổi Laplace

$$C(s) = \frac{Ke^{-sT_1}}{s(1+sT_2)}$$

Hàm truyền

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{Ke^{-sT_1}}{1+sT_2}$$

- Hàm truyền ôtô



Phương trình vi phân động học của ô tô

$$M\frac{dv(t)}{dt} + Bv(t) = f(t)$$

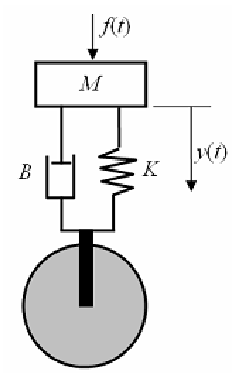
Trong đó: M - khối lượng xe, B - hệ số ma sát
f(t) - lực kéo
v(t) - tốc độ xe

Hàm truyền:

$$G(s) = \frac{V(s)}{F(s)} = \frac{1}{Ms+B} = \frac{K}{sT+1}$$

Trong đó: $K = \dfrac{1}{B}$; $T = \dfrac{M}{B}$

- Hệ thống giảm xóc của ô tô, xe máy



Phương trình vi phân mô tả động học hệ thống

$$M\frac{d^2y(t)}{dt^2} + B\frac{dy(t)}{dt} + K.y(t) = f(t)$$

Trong đó: M - khối lượng tác động lên bánh xe, B hệ số ma sát, K độ cứng lò xo

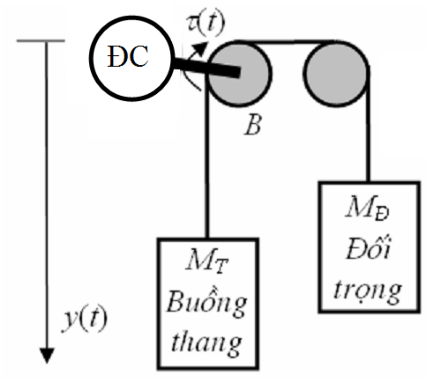
f(t): lực do xóc

y(t): dịch chuyển của thân xe

Hàm truyền

$$G(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{1}{Ms^2 + Bs + 1}$$

- Hàm truyền hệ thống thang máy



Phương trình vi phân mô tả động học hệ thống

$$M_T \frac{d^2y(t)}{dt^2} + B\frac{dy(t)}{dt} + M_T.g = K.\tau(t) + M_Đ.g$$

Trong đó: M_T - khối lượng buồng thang, $M_Đ$ - khối lượng đối trọng,

B - hệ số ma sát, K - hệ số tỉ lệ

$\tau(t)$ - moment kéo của động cơ: tín hiệu vào

y(t) - vị trí buồng thang: tín hiệu ra

Hàm truyền: (khi $M_T = M_Đ$)

$$G(s) = \frac{Y(s)}{\tau(s)} = \frac{K}{M_T s^2 + Bs}$$

- Hàm truyền của cảm biến

Tín hiệu vào của cản biến là tín hiệu đầu ra của hệ thống

Tín hiệu ra của cảm biến là tín hiệu hồi tiếp

Tín hiệu $c_{ht}(t)$ là tín hiệu tỉ lệ với c(t), do đó hàm truyền của cảm biến thường là khâu tỉ lệ:

$$H(s) = K_{ht}$$

Ví dụ: Giả sử nhiệt độ lò thay đổi trong tầm c(t) = 0 ÷ 5000C, nếu cảm biến nhiệt biến đổi sự thay đổi nhiệt độ thành sự thay đổi điện áp trong tầm $c_{ht}(t) = 0 \div 5V$, thì hàm truyền của cảm biến là:

$$H(s) = K_{ht} = 0{,}01$$

Nếu cảm biến có trễ, hàm truyền cảm biến là khâu quán tính bậc nhất:

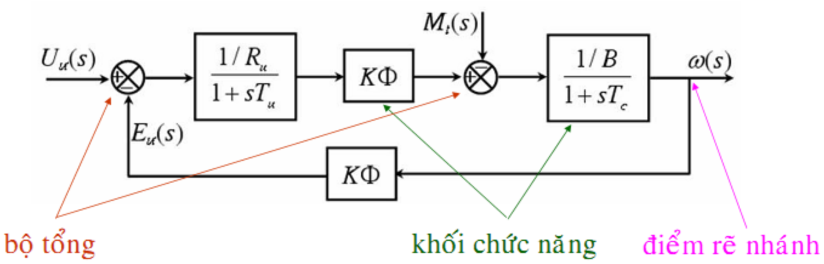
$$H(s) = \frac{K_{ht}}{1 + T_{ht}s}$$

2.3. Hàm truyền của hệ thống tự động

2.3.1. Đại số sơ đồ khối

a. Sơ đồ khối

Sơ đồ khối của một hệ thống là hình vẽ mô tả chức năng của các phần tử và sự tác động qua lại giữa các phần tử trong hệ thống.



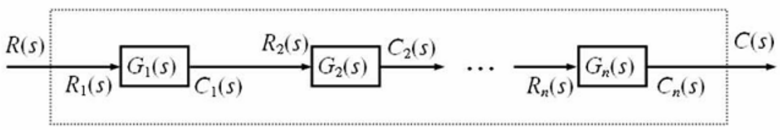
Hình (): Sơ đồ khối hệ thống điều khiển tự động

Sơ đồ khối có 3 thành phần chính:

- Khối chức năng: tín hiệu ra bằng hàm truyền nhân tín hiệu vào
- Bộ tổng: tín hiệu ra bằng tổng đại số các tín hiệu vào
- Điểm rẽ nhánh: tất cả tín hiệu tại điểm rẽ nhánh đều bằng nhau

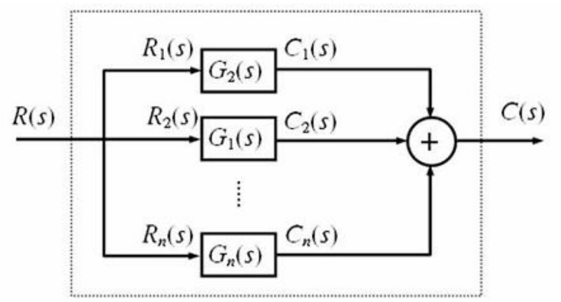
b. Hàm truyền của các hệ thống đơn giản

- Hệ thống nối tiếp



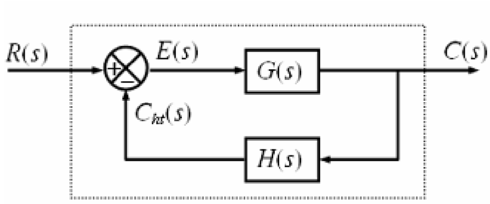
Hàm truyền: $G(s) = \prod_{i=1}^{n} G_i(s)$

- Hệ thống song song



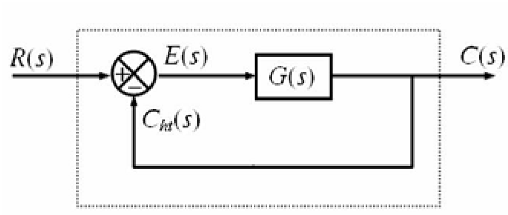
Hàm truyền: $G(s) = \sum_{i=1}^{n} G_i(s)$

- Hệ thống hồi tiếp âm



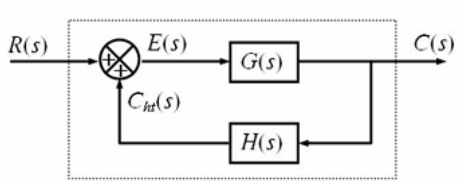
Hàm truyền: $G_k(s)=\dfrac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$

- Hệ thống hồi tiếp âm đơn vị



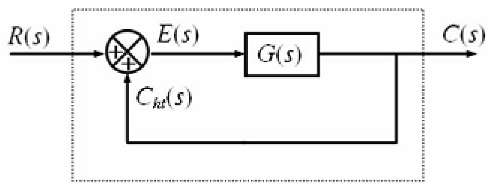
Hàm truyền: $G_k(s)=\dfrac{G(s)}{1+G(s)}$

- Hệ thống hồi tiếp dương



Hàm truyền: $G_k(s)=\dfrac{G(s)}{1-G(s)H(s)}$

- Hệ thống hồi tiếp dương đơn vị



Hàm truyền: $G_k(s)=\dfrac{G(s)}{1-G(s)}$

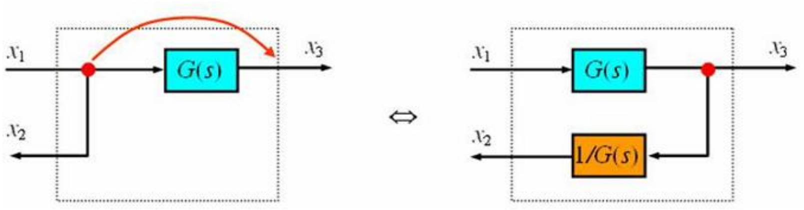
c. Hàm truyền của hệ thống hồi tiếp nhiều vòng

Đối với các hệ thống phức tạp gồm nhiều vòng hồi tiếp, ta thực hiện các phép biến đổi tương đương sơ đồ khối để làm xuất hiện các dạng ghép nối đơn giản (nối tiếp, song song, hồi tiếp 1 vòng) và tính hàm truyền tương đương theo thứ tự từ trong ra ngoài.

Hai sơ đồ khối được gọi là tương đương nếu hai sơ đồ khối đó có quan hệ giữa các tín hiệu vào và tín hiệu ra như nhau.

- Các phép biến đổi tương đương sơ đồ khối

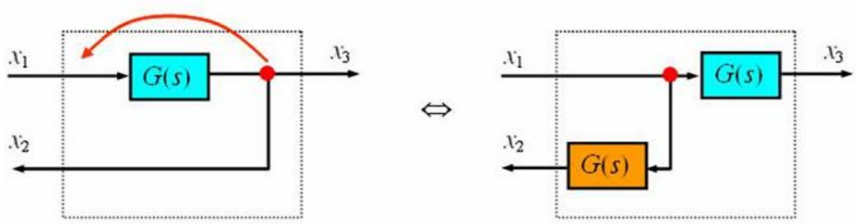
Chuyển điểm rẽ nhánh từ phía trước ra phía sau 1 khối:



$$x_2 = x_1$$
$$x_3 = x_1 G$$

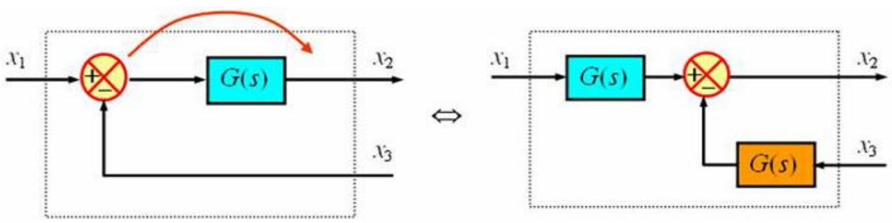
$$x_3 = x_1 G$$
$$x_2 = x_3 \frac{1}{G} = \frac{1}{G} G x_1 = x_1$$

Chuyển điểm rẽ nhánh từ phía sau ra phía trước 1 khối:



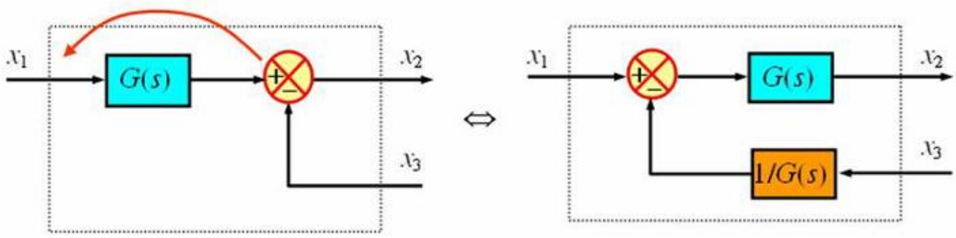
$$x_3 = x_1 G \qquad x_3 = x_1 G$$
$$x_2 = x_3 = x_1 G \qquad x_2 = x_1 G$$

Chuyển bộ tổng từ phía trước ra phía sau 1 khối:



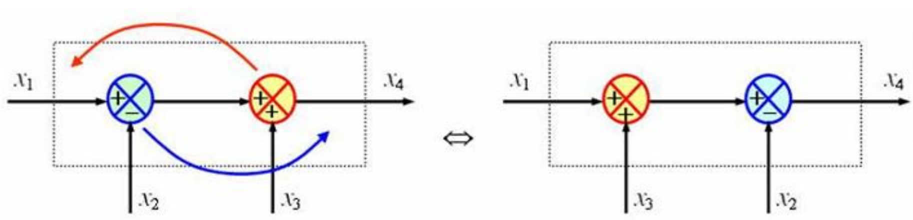
$$x_2 = (x_1 - x_3)G \qquad x_2 = x_1 G - x_3 G = (x_1 - x_3)G$$

Chuyển bộ tổng từ phía sau ra phía trước 1 khối:



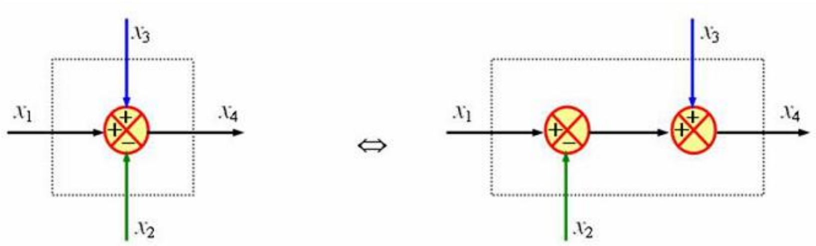
$$x_2 = x_1 G - x_3 \qquad x_2 = (x_1 - x_3 \frac{1}{G})G = x_1 G - x_3$$

Chuyển vị trí hai bộ tổng:



$$x_4 = (x_1 - x_2) + x_3 \qquad\qquad x_4 = (x_1 + x_3) - x_2$$

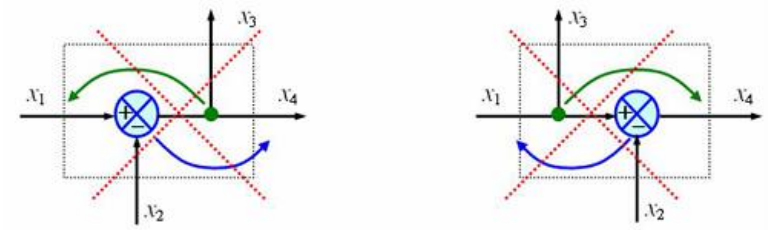
Tách 1 bộ tổng thành 2 bộ tổng :



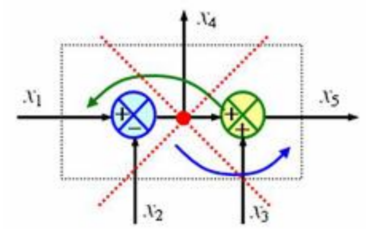
$$x_4 = x_1 - x_2 + x_3 \qquad\qquad x_4 = (x_1 - x_2) + x_3$$

Một số trường hợp không thể biến đổi sơ đồ

+ Chuyển vị trí điểm rẽ nhánh và bộ tổng :

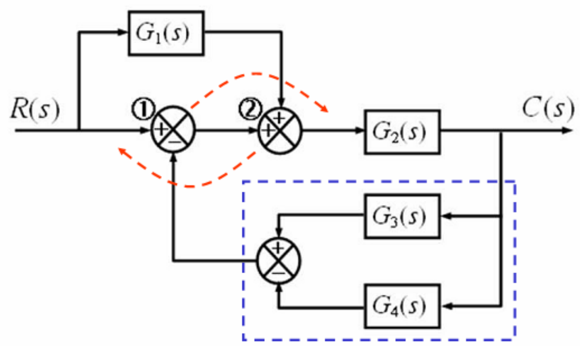


+ Chuyển vị trí 2 bộ tổng khi giữa 2 bộ tổng có điểm rẽ nhánh :



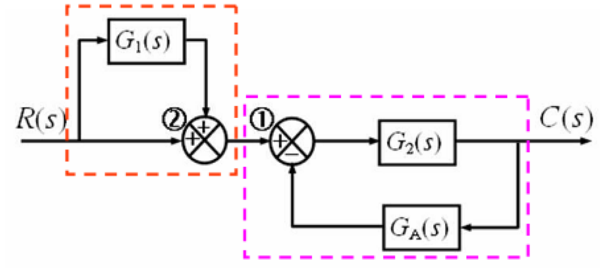
d. Ví dụ tính hàm truyền hệ thống

Ví dụ 1: Tính hàm truyền tương đương của hệ thống có sơ đồ khối như sau:



Bài giải:

Chuyển vị trí hai bộ tổng 1 và 2, rút gọn $G_A(s)=[G_3(s)//G_4(s)]$



$$G_A(s) = G_3(s) - G_4(s)$$

$G_B(s)$ = [$G_1(s)$ // hàm truyền đơn vị] , $G_C(s)$ = vòng hồi tiếp[$G_2(s)$,$G_A(s)$]:

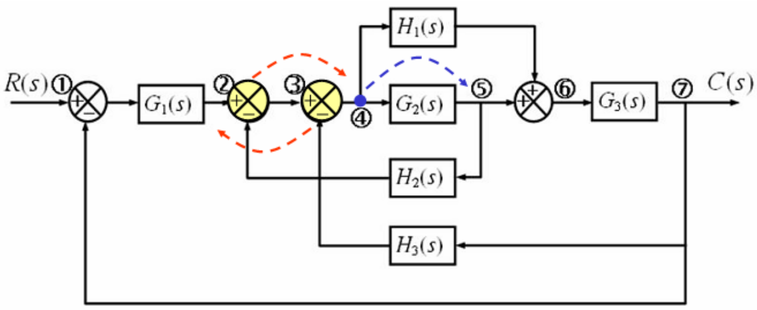
$$G_B(s) = 1 + G_1(s)$$

$$G_C(s) = \frac{G_2(s)}{1 + G_A(s).G_2(s)} = \frac{G_2(s)}{1 + G_2(s)[G_3(s) - G_4(s)]}$$

Hàm truyền tương đương của hệ thống

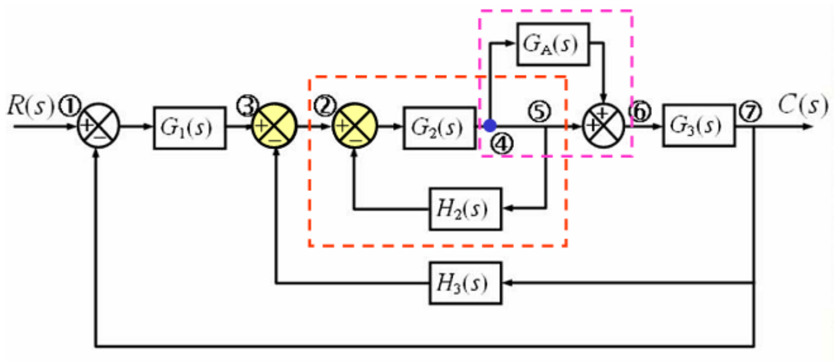
$$G_{tđ} = G_B(s)G_C(s) = \frac{[1 + G_1(s)]G_2(s)}{1 + G_2(s)[G_3(s) - G_4(s)]}$$

Ví dụ 2: Tính hàm truyền tương đương của hệ thống có sơ đồ khối như sau:



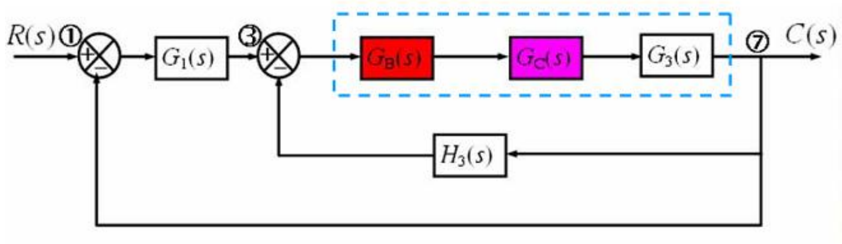
Bài giải:

Chuyển vị trí hai bộ tổng 2 và 3, chuyển điểm rẽ nhánh ra sau $G_2(s)$



$$G_A = \frac{H_1}{G_2}$$

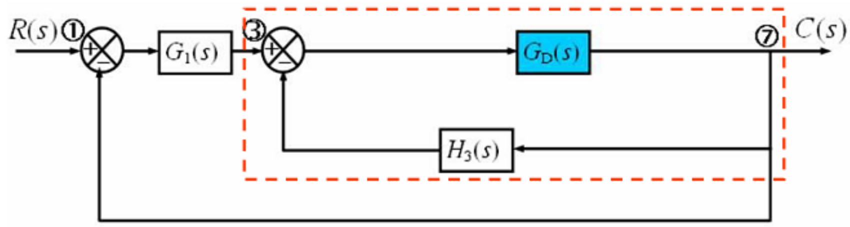
$G_B(s)$ = vòng hồi tiếp[$G_2(s)$, $H_2(s)$], $G_C(s)$ = [$G_A(s)$// hàm truyền đơn vị]



$$G_B = \frac{G_2}{1+G_2H_2}$$

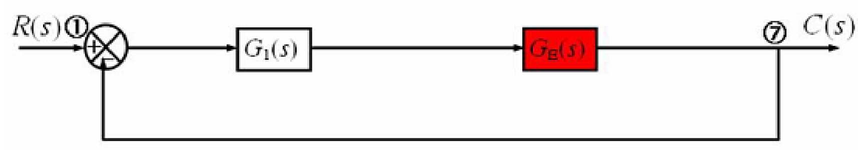
$$G_C = 1+G_A = 1+\frac{H_1}{G_2} = \frac{G_2+H_1}{G_2}$$

$G_D(s)$ = [$G_B(s)$ nối tiếp $G_C(s)$ nối tiếp $G_3(s)$]



$$G_D = G_BG_CG_3 = \frac{G_2}{1+G_2H_2}\,\frac{G_2+H_1}{G_2}\,G_3 = \frac{G_2G_3+G_3H_1}{1+G_2H_2}$$

$G_E(s)$ = vòng hồi tiếp [$G_D(s)$, $H_3(s)$]



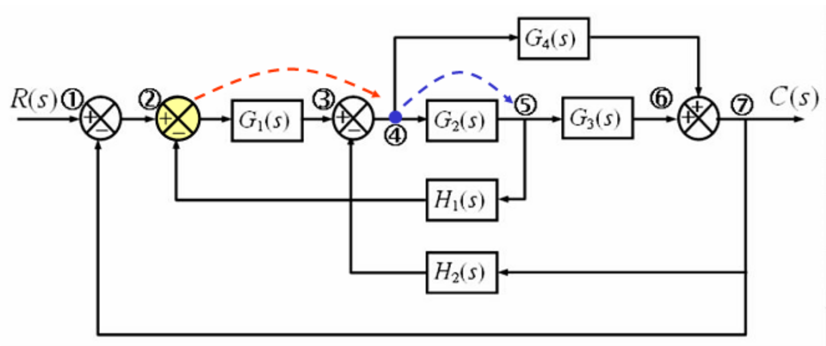
$$G_E = \frac{G_D}{1+G_DH_3} = \frac{\dfrac{G_2G_3+G_3H_1}{1+G_2H_2}}{1+\dfrac{G_2G_3+G_3H_1}{1+G_2H_2}H_3} = \frac{G_2G_3+G_3H_1}{1+G_2H_2+G_2G_3H_3+G_3H_1H_3}$$

Hàm truyền tương đương của hệ thống:

$$G_{td} = \frac{G_1G_E}{1+G_1G_E} = \frac{G_1\dfrac{G_2G_3+G_3H_1}{1+G_2H_2+G_2G_3H_3+G_3H_1H_3}}{1+G_1\dfrac{G_2G_3+G_3H_1}{1+G_2H_2+G_2G_3H_3+G_3H_1H_3}}$$

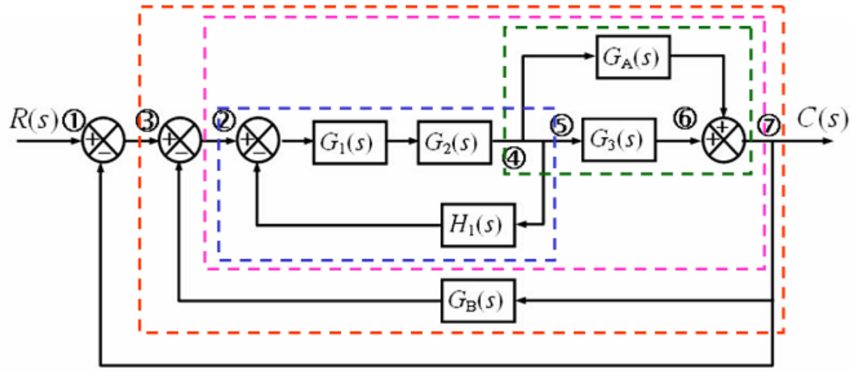
$$G_{td} = \frac{G_1G_2G_3+G_1G_3H_1}{1+G_2H_2+G_2G_3H_3+G_3H_1H_3+G_1G_2G_3+G_1G_3H_1}$$

Ví dụ 3: Tính hàm truyền tương đương của hệ thống có sơ đồ khối như sau:



Bài giải:

Chuyển bộ tổng 3 ra trước $G_1(s)$, sau đó đổi vị trí 2 bộ tổng 2 và 3. Chuyển điểm rẽ nhánh 4 ra sau $G_2(s)$



Một số nhận xét

Phương pháp biến đổi sơ đồ khối là một phương pháp đơn giản.

Khuyết điểm của phương pháp biến đổi sơ đồ khối là không mang tính hệ thống, mỗi sơ đồ cụ thể có thể có nhiều cách biến đổi khác nhau, tùy theo trực giác của người giải bài toán.

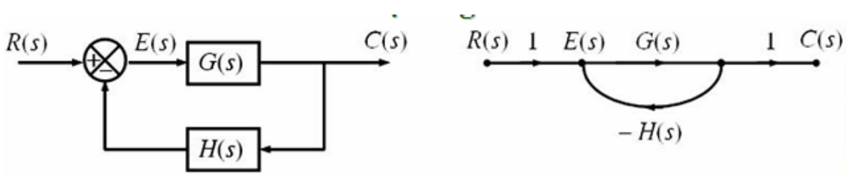
Khi tính hàm truyền tương đương ta phải thực hiện nhiều phép tính trên các phân thức đại số, đối với các hệ thống phức tạp các phép tính này hay bị nhầm lẫn.

Phương pháp biến đổi tương đương sơ đồ khối chỉ thích hợp để tìm hàm truyền tương đương của các hệ thống đơn giản.

Đối với các hệ thống phức tạp ta có một phương pháp hiệu quả hơn, đó là phương pháp sơ đồ dòng tín hiệu sẽ được đề cập đến ở mục tiếp theo

2.3.2. Sơ đồ dòng tín hiệu

a. Định nghĩa



Hình (): Sơ đồ khối và sơ đồ dòng tín hiệu

Sơ đồ dòng tín hiệu là một mạng gồm các nút và nhánh.

Nút: là một điểm biểu diễn một biến hay tín hiệu trong hệ thống.

Nhánh: là đường nối trực tiếp 2 nút, trên mỗi nhánh có ghi mũi tên chỉ chiều truyền của tín hiệu và có ghi hàm truyền cho biết mối quan hệ giữa tín hiệu ở 2 nút.

Nút nguồn: là nút chỉ có các nhánh hướng ra.

Nút đích: là nút chỉ có các nhánh hướng vào.

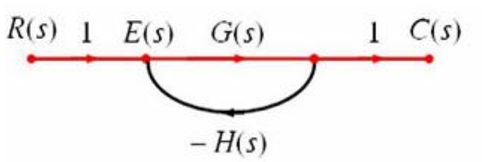
Nút hỗn hợp: là nút có cả các nhánh ra và các nhánh vào.

Đường tiến: là đường gồm các nhánh liên tiếp có cùng hướng tín hiệu đi từ nút nguồn đến nút đích và chỉ qua mỗi nút một lần.

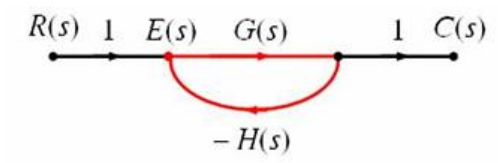
Độ lợi của một đường tiến là tích của các hàm truyền của các nhánh trên đường tiến đó.

Vòng kín: là đường khép kín gồm các nhánh liên tiếp có cùng hướng tín hiệu và chỉ qua mỗi nút một lần.

Độ lợi của một vòng kín tích của các hàm truyền của các nhánh trên vòng kín đó.



Đường tiến



Vòng kín

b. Công thức Mason

Hàm truyền tương đương từ một nút nguồn đến một nút đích của hệ thống tự động biểu diễn bằng sơ đồ dòng tín hiệu được cho bởi:

$$G = \frac{1}{\Delta}\sum_k \Delta_k P_k$$

Trong đó: P_k – độ lợi của đường tiến thứ k đi từ nút nguồn đến nút đích đang xét.

Δ – định thức Graph tín hiệu, được tính theo công thức

$$\Delta = 1 - \sum_i L_i + \sum_{i,j} L_i L_j - \sum_{i,j,m} L_i L_j L_m + \ldots$$

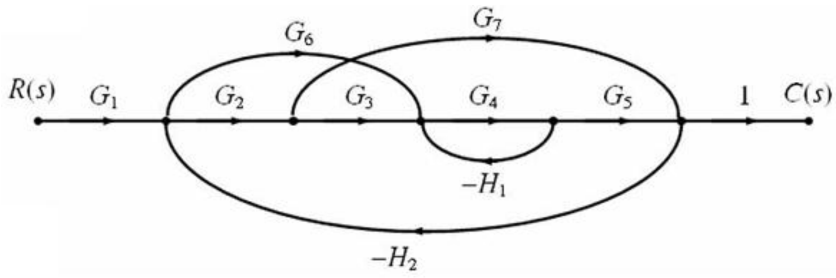
$\sum_i L_i$ – tổng các độ lợi vòng của các vòng kín có trong Graph tín hiệu

$\sum_{i,j} L_i L_j$ - tổng các tích độ lợi của 2 vòng không dính nhau

$\sum_{i,j,m} L_i L_j L_m$ - tổng các tích độ lợi của 3 vòng không dính nhau

Δ_k – định thức con của Graph tín hiệu, Δ_k được suy ra từ Δ bằng cách bỏ đi các vòng kín có dính tới đường tiến P_k.

Ví dụ: Tính hàm truyền tương đương của hệ thống có sơ đồ dòng tín hiệu như sau:



Bài giải:

- Đường tiến:

G1 → G2 → G3 → G4 → G5: $P_1 = G_1G_2G_3G_4G_5$

G1 → G6 → G4 → G5: $P_2 = G_1G_4G_5G_6$

G1 → G2 → G7: $P_3 = G_1G_2G_7$

- Vòng kín:

$G_4 \rightarrow H_1$: $L_1 = -G_4H_1$

$G_2 \rightarrow G_7 \rightarrow H_2$: $L_2 = -G_2G_7H_2$

$G_6 \rightarrow G_4 \rightarrow G_5 \rightarrow H_2$: $L_3 = -G_4G_5G_6H_2$

$G_2 \rightarrow G_3 \rightarrow G_4 \rightarrow G_5 \rightarrow H_2$: $L_4 = -G_2G_3G_4G_5H_2$

- Định thức sơ đồ dòng tín hiệu

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4) + L_1L_2$$

$$\Delta = 1 + G_4H_1 + G_2G_7H_2 + G_4G_5G_6H_2 + G_2G_3G_4G_5H_2 + G_2G_4G_7H_1H_2$$

- Các định thức con

$$\Delta_1 = 1$$

$$\Delta_2 = 1$$

$$\Delta_3 = 1 - L_4$$

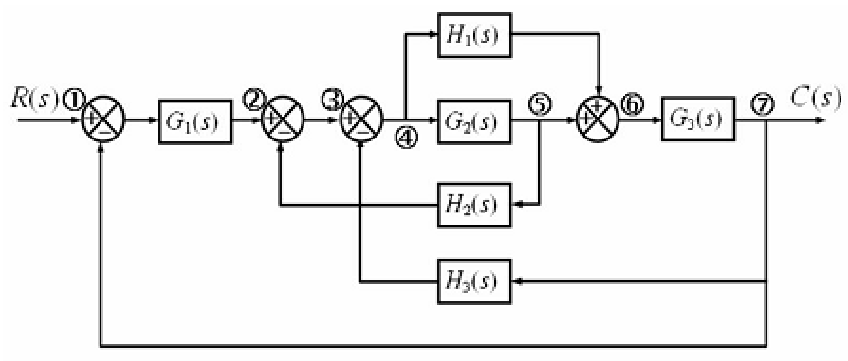
- Hàm truyền tương đương của hệ thống:

$$G_{tđ} = \frac{1}{\Delta}(P_1\Delta_1 + P_2\Delta_2 + P_3\Delta_3)$$

$$G_{tđ} = \frac{G_1G_2G_3G_4G_5 + G_1G_4G_5G_6 + G_1G_2G_7(1 + G_2G_3G_4G_5H_2)}{1 + G_4H_1 + G_2G_7H_2 + G_4G_5G_6H_2 + G_2G_3G_4G_5H_2 + G_2G_4G_7H_1H_2}$$

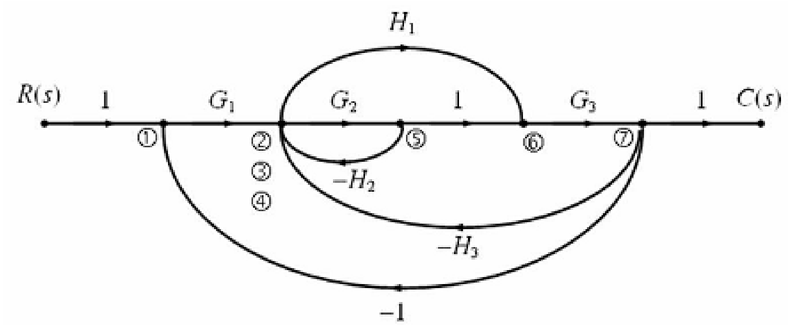
Ví dụ: Tính hàm truyền tương đương của hệ thống có sơ đồ khối như sau:

Ví dụ: Tính hàm truyền tương đương của hệ thống có sơ đồ khối như sau:



Bài giải:

Biến đổi tương đương sơ đồ khối về sơ đồ dòng tín hiệu



- Đường tiến:

G1 → G2 → G3: $P_1 = G_1G_2G_3$

G1 → H1 → G3 $P_2 = G_1G_3H_1$

- Vòng kín:

G2 → H2: $L_1 = -G_2H_2$

G2 → G3 → H3: $L_2 = -G_2G_3H_3$

G1 → G2 → G3 → -1 $L_3 = -G_1G_2G_3$

H1 → G3 → H3 $L_4 = -G_3H_1H_3$

G1 → H1 → G3 → -1 $L_5 = -G_1G_3H_1$

- Định thức sơ đồ dòng tín hiệu:

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5)$$

$$\Delta = 1 + G_2H_2 + G_2G_3H_3 + G_1G_2G_3 + G_3H_1H_3 + G_1G_3H_1$$

- Định thức con

$$\Delta_1 = 1$$

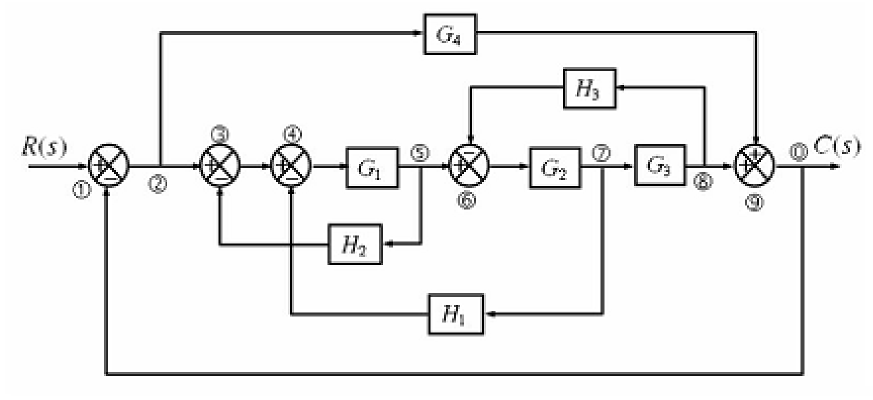
$$\Delta_2 = 1$$

- Hàm truyền tương đương của hệ thống:

$$G_{tđ} = \frac{1}{\Delta}(P_1\Delta_1 + P_2\Delta_2)$$

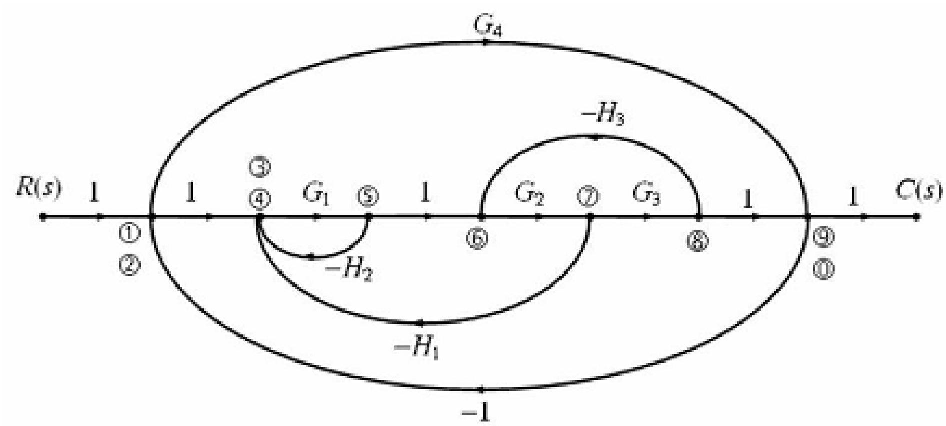
$$G_{tđ} = \frac{G_1G_2G_3 + G_1G_3H_1}{1 + G_2H_2 + G_2G_3H_3 + G_1G_2G_3 + G_3H_1H_3 + G_1G_3H_1}$$

Ví dụ 3: Tính hàm truyền tương đương của hệ thống có sơ đồ khối như sau



Bài giải:

Biến đổi sơ đồ



- Đường tiến:

R(s) → G1 → G2 → G3 → C(s) $\quad P_1 = G_1G_2G_3$

R(s) → 1 → G4 → 1 → C(s) $\quad P_2 = G_4$

- Vòng kín:

L1: G1 → -H2 $\quad L_1 = -G_1H_2$

L2: G1 → G2 → -H1 $\quad L_2 = -G_1G_2H_1$

L3: G1 → G2 → G3 → -1 $\quad L_3 = -G_1G_2G_3$

L4: G2 → G3 → -H3 $\quad L_4 = -G_2G_3H_3$

L5: G4 → -1 $\quad L_5 = -G_4$

- Định thức Graph tín hiệu

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5) + (L_1L_4 + L_1L_5 + L_2L_5 + L_4L_5) - L_1L_4L_5$$
$$= 1 + G_1H_1 + G_1G_2H_1 + G_1G_2G_3 + G_2G_3H_3 + G_4 + G_1G_2G_3H_2H_3 +$$
$$+ G_1G_4H_2 + G_1G_2G_4H_1 + G_2G_3G_4H_3 + G_1G_2G_3H_3$$

- Định thức con

$$\Delta_1 = 1$$
$$\Delta_2 = 1 - (L_1 + L_2 + L_4) + L_1L_4$$

-Hàm truyền hệ thống

$$G=\frac{1}{\Delta}(P_1\Delta_1+P_2\Delta_2)$$

$$G=\frac{P_1=G_1G_2G_3+G_4(1+G_1H_2+G_1G_2H_1+G_2G_3H_3+G_1G_2G_3H_2H_3)}{\begin{array}{l}1+G_1H_1+G_1G_2H_1+G_1G_2G_3+G_2G_3H_3+G_4+G_1G_2G_3H_2H_3+\\+G_1G_4H_2+G_1G_2G_4H_1+G_2G_3G_4H_3+G_1G_2G_3H_3\end{array}}$$

2.3.3. Phương trình trạng thái

a. Trạng thái

Trạng thái của một hệ thống là tập hợp nhỏ nhất các biến (gọi là biến trạng thái) mà nếu biết giá trị của các biến này tại thời điểm t_0 và biết các tín hiệu vào ở thời điểm $t > t_0$, ta hoàn toàn có thể xác định được đáp ứng của hệ thống tại mọi thời điểm $t \geq t_0$.

Hệ thống bậc n có n biến trạng thái.

Các biến trạng thái có thể chọn là biến vật lý hoặc không phải là biến vật lý.

Vector trạng thái: n biến trạng thái hợp thành vector cột gọi là vevtor trạng thái

$$x=\begin{bmatrix}x_1 & x_2 & \dots & x_n\end{bmatrix}$$

Bằng cách sử dụng các biến trạng thái, ta có thể chuyển phương trình vi phân bậc n mô tả hệ thống thành hệ gồm n phương trình vi phân bậc nhất, (hệ phương trình trạng thái)

Trong đó: $\begin{cases}\dot{x}(t)=A.x(t)+B.r(t)\\C(t)=C.x(t)\end{cases}$ (*)

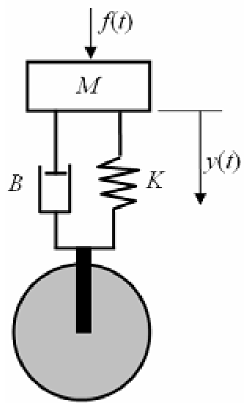
$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\\ \dots\\ b_n\end{bmatrix}\qquad C=\begin{bmatrix}c_1 & c_2 & \dots & c_n\end{bmatrix}$$

Chú ý: Tùy theo cách đặt biến trạng thái mà một hệ thống có thể được mô tả bằng nhiều phương trình trạng thái khác nhau.

Nếu A là ma trận thường, ta gọi (*) là phương trình trạng thái ở dạng thường, nếu A là ma trận chéo, ta gọi (*) là phương trình trạng thái ở dạng chính tắc.

Vài thí dụ về phương trình trạng thái

- Hệ thống giảm xóc của ô tô, xe máy



Phương trình vi phân:

$$M\frac{dv(t)}{dt} + Bv(t) = f(t)$$

Trong đó: M - khối lượng xe, B - hệ số ma sát

f(t) - lực kéo

v(t) - tốc độ xe

Đặt : $\begin{cases} x_1(t) = y(t) \\ x_2(t) = \dot{y}(t) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -\dfrac{K}{M}x_1(t) - \dfrac{B}{M}x_2(t) + \dfrac{1}{M}f(t) \end{cases}$

$$\rightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{K}{M} & -\dfrac{B}{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{M} \end{bmatrix} f(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1(t) = A.x(t) + B.f(t) \\ y(t) = C.x(t) \end{cases}$$

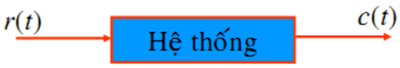
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{K}{M} & -\dfrac{B}{M} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{M} \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

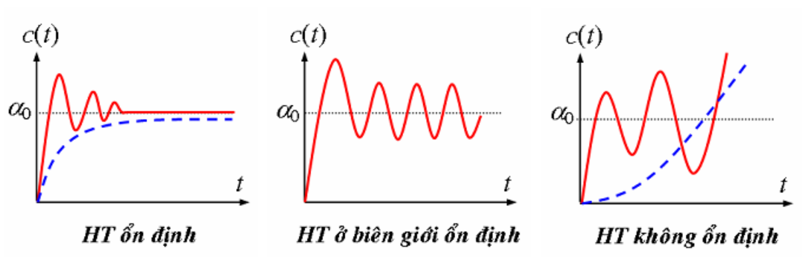
CHƯƠNG 3: KHẢO SÁT TÍNH ỔN ĐỊNH CỦA HỆ THỐNG

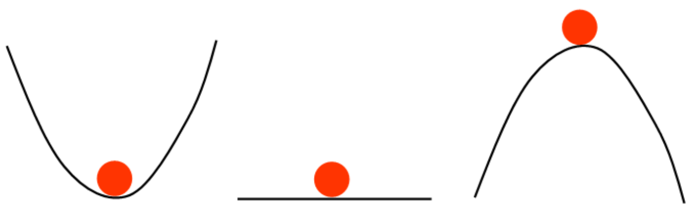
3.1. Khái niệm ổn định

3.1.1. Khái niệm:

Hệ thống được gọi là ổn định BIBO (Bounded Input Bounded Output) nếu đáp ứng của hệ bị chặn khi tín hiệu vào bị chặn.







HT ổn định

HT ở biên giới ổn định

HT không ổn định

3.1.2. Cực và zero

Cho hệ thống tự động có hàm truyền là:

$$G(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + ... + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + ... + a_{n-1} s + a_n}$$

Đặt: $A(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + ... + a_{n-1} s + a_n$ - mẫu số hàm truyền

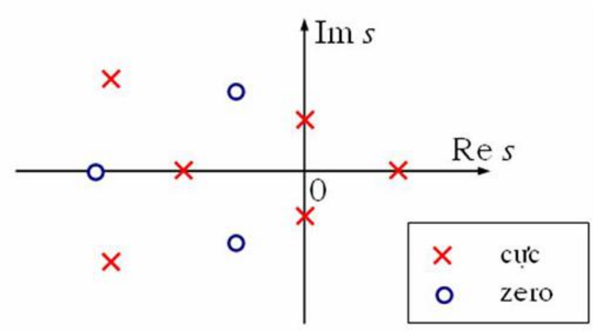
$B(s) = b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + ... + b_{m-1} s + b_m$ - tử số hàm truyền

Cực (Pole): là nghiệm của mẫu số hàm truyền, tức là nghiệm của phương trình A(s) = 0. Do A(s) bậc n nên hệ thống có n cực, ký hiệu là p_i, i =1,2,…n.

Zero: là nghiệm của tử số hàm truyền, tức là nghiệm của phương trình B(s) = 0. Do B(s) bậc m nên hệ thống có m zero ký hiệu là z_i, i =1,2,…m.

Giản đồ cực – zero

Giản đồ cực – zero là đồ thị biểu diễn vị trí các cực và các zero của hệ thống trong mặt phẳng phức.



Điều kiện ổn định

Tính ổn định của hệ thống phụ thuộc vào vị trí các cực.

Hệ thống có tất cả các cực có phần thực âm (có tất cả các cực đều nằm bên trái mặt phẳng phức): hệ thống ổn định.

Hệ thống có cực có phần thực bằng 0 (nằm trên trục ảo), các cực còn lại có phần thực bằng âm: hệ thống ở biên giới ổn định.

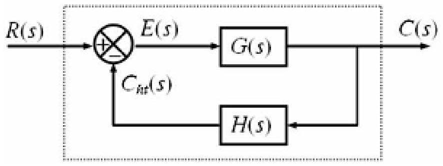
Hệ thống có ít nhất một cực có phần thực dương (có ít nhất một cực nằm bên phải mặt phẳng phức): hệ thống không ổn định.

Phương trình đặc trưng (PTĐT)

Phương trình đặc trưng: phương trình A(s) = 0

Đa thức đặc trưng: đa thức A(s)

- Hệ thống hồi tiếp



Phương trình đặc trưng: $1+G(s)H(s)=0$

- Hệ thống mô tả bằng PTTT

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = A.x(t) + B.f(t) \\ y(t) = C.x(t) \end{cases}$$

Phương trình đặc trưng: $\det(sI-A)=0$

3.2. Tiêu chuẩn ổn định đại số

3.2.1. Điều kiện cần

Điều kiện cần để hệ thống ổn định là tất cả các hệ số của phương trình đặc trưng phải khác 0 và cùng dấu.

Ví dụ: Hệ thống có phương trình đặc trưng:

$s^3+3s^2-2s+1=0$ $\rightarrow$ Không ổn định (có hệ số âm)

$s^4+2s^2+5s+3=0$ $\rightarrow$ Không ổn định (có hệ số bằng 0)

$s^4+4s^3+5s^2+2s+1=0$ $\rightarrow$ Chưa kết luận được (thỏa mãn điều kiện cần)

3.2.2. Tiêu chuẩn Routh

- Qui tắc thành lập bảng Routh

Cho hệ thống có phương trình đặc trưng:

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + ... + a_{n-1} s + a_n = 0$$

Muốn xét tính ổn định của hệ thống theo tiêu chuẩn Routh, trước tiên ta thành lập bảng Routh theo qui tắc:

+ Bảng Routh có n+1 hàng.

+ Hàng 1 của bảng Routh gồm các hệ số có chỉ số chẵn.

+ Hàng 2 của bảng Routh gồm các hệ số có chỉ số lẻ.

+ Phần tử ở hàng i cột j của bảng Routh ($i \geq 3$) được tính theo công thức:

$$c_{i,j} = c_{i-2,j+1} - \alpha_i c_{i-1,j+1}$$

Với $\alpha_i = \dfrac{c_{i-2,1}}{c_{i-1,1}}$

	s^n	$c_{11} = a_0$	$c_{12} = a_2$	$c_{13} = a_4$	$c_{14} = a_6$	$\dots$
	s^{n-1}	$c_{21} = a_1$	$c_{22} = a_3$	$c_{23} = a_5$	$c_{24} = a_7$	$\dots$
$\alpha_3 = \dfrac{c_{11}}{c_{21}}$	s^{n-2}	$c_{31} = c_{12} - \alpha_3 c_{22}$	$c_{32} = c_{13} - \alpha_3 c_{23}$	$c_{33} = c_{14} - \alpha_3 c_{24}$	$c_{34} = c_{15} - \alpha_3 c_{25}$	$\dots$
$\alpha_4 = \dfrac{c_{21}}{c_{31}}$	s^{n-3}	$c_{41} = c_{22} - \alpha_4 c_{32}$				$\dots$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$\alpha_{n-1} = \dfrac{c_{n-3,1}}{c_{n-2,1}}$	s^1					$\dots$
$\alpha_n = \dfrac{c_{n-2,1}}{c_{n-1,1}}$	s^0	$c_{n1} = c_{n-2,2} - {}$ $- \alpha_n c_{n-1,2}$				$\dots$

Phát biểu tiêu chuẩn Routh:

Điều kiện cần và đủ để hệ thống ổn định là tất cả các phần tử nằm ở cột 1 của bảng Routh đều dương.

Số lần đổi dấu của các phần tử ở cột 1 của bảng Routh bằng số nghiệm của phương trình đặc trưng nằm bên phải mặt phẳng phức.

Ví dụ: Xét tính ổn định của hệ thống có phương trình đặc trưng là:

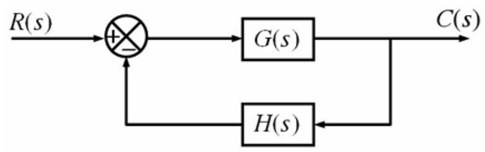
$$s^4 + 4s^3 + 5s^2 + 2s + 1 = 0$$

Giải: Bảng Routh

	s^4	1	5	1
	s^3	4	2	0
$\alpha_3 = \dfrac{c_{11}}{c_{21}} = \dfrac{1}{4}$	s^2	$c_{31} = c_{12} - \alpha_3 c_{22}$ $= 5 - \dfrac{1}{4}2 = \dfrac{9}{2}$	$c_{32} = c_{13} - \alpha_3 c_{23}$ $= 1 - \dfrac{1}{4}0 = 1$	
$\alpha_4 = \dfrac{c_{21}}{c_{31}} = 4 : \dfrac{9}{2} = \dfrac{8}{9}$	s	$c_{41} = c_{22} - \alpha_4 c_{32}$ $= 2 - \dfrac{8}{9}1 = \dfrac{10}{9}$	$c_{42} = c_{23} - \alpha_4 c_{33}$ $= 0 - \dfrac{8}{9}0 = 0$	
$\alpha_5 = \dfrac{c_{31}}{c_{41}} = \dfrac{9}{2} : \dfrac{10}{9} = \dfrac{81}{20}$	s^0	$c_{51} = c_{32} - \alpha_5 c_{42}$ $= 1 - \dfrac{81}{20}0 = 1$		

Kết luận: Hệ thống ổn định do tất cả các phần tử ở cột 1 bảng Routh đều dương

Ví dụ 2: Xét tính ổn định của hệ thống có sơ đồ khối:



$$G(s) = \frac{50}{s(s+3)(s^2+s+5)}$$

$$H(s) = \frac{1}{s+2}$$

Bài giải:

Phương trình đặc trưng của hệ thống:

$$1 + G(s)H(s) = 0$$

$$1 + \frac{50}{s(s+3)(s^2+s+5)} \frac{1}{s+2} = 0$$

$$s(s+3)(s^2+s+5)(s+2) + 50 = 0$$

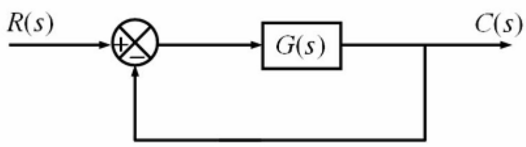
$$s^5 + 6s^4 + 16s^3 + 31s^2 + 30s + 50 = 0$$

Lập bảng Routh

	s^5	1	16	30
	s^4	6	31	50
$\alpha_3 = \frac{1}{6}$	s^3	$16 - \frac{1}{6}.31 = 10.83$	$30 - \frac{1}{6}.50 = 21.67$	0
$\alpha_4 = \frac{6}{10.83}$	s^2	$31 - \frac{6}{10.83} \times 21.67 = 18.99$	50	
$\alpha_5 = \frac{10.83}{18.99}$	s^1	$21.67 - \frac{10.83}{18.99} \times 50 = -6.84$	0	
	s^0	50		

Hệ thống không ổn định vì cột 1 đổi dấu 2 lần

Ví dụ 3: Tìm điều kiện của K để hệ thống ổn định



$$G(s) = \frac{K}{s(s^2 + s + 1)(s + 2)}$$

Bài giải:

Phương trình đặc trưng của hệ thống

$$1 + G(s) = 0$$

$$1 + \frac{K}{s(s^2 + s + 1)(s + 2)} = 0$$

$$s(s^2 + s + 1)(s + 2) + K = 0$$

$$s^4 + 3s^3 + 3s^2 + 2s + K = 0$$

Bảng Routh:

	s^4	1	3	K
	s^3	3	2	0
$\alpha_3 = \frac{1}{3}$	s^2	$3 - \frac{1}{3}.2 = \frac{7}{3}$	K	
$\alpha_4 = \frac{9}{7}$	s^1	$2 - \frac{9}{7}.K$	0	
	s^0	K		

Điều kiện

$$\begin{cases} 2 - \frac{9}{7}K > 0 \\ K > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} K < \frac{14}{9} \\ K > 0 \end{cases} \rightarrow 0 < K < \frac{14}{9}$$

Trường hợp đặc biệt

Nếu bảng Routh có hệ số ở cột 1 của hàng nào đó bằng 0, các hệ số còn lại của hàng đó khác 0 thì ta thay hệ số bằng 0 ở cột 1 bởi số ε dương nhỏ tùy ý, sau đó quá trình tính toán được tiếp tục.

Ví dụ 4: Xét tính ổn định của hệ thống có phương trình đặc trưng

$$s^4 + 2s^3 + 4s^2 + 8s + 3 = 0$$

Giải:

Bảng Routh

	s^4	1	4	3
	s^3	2	8	0
$\alpha_3 = \frac{1}{2}$	s^2	$4 - \frac{1}{2}.8 = 0$	3	
$\Rightarrow$	s^2	$\varepsilon > 0$	3	
$\alpha_4 = \frac{2}{\varepsilon}$	s^1	$8 - \frac{2}{\varepsilon}.3 < 0$	0	
	s^0	3		

Kết luận: Vì các hệ số ở cột 1 bảng Routh đổi dấu 2 lần nên phương trình đặc trưng của hệ thống có hai nghiệm nằm bên phải mặt phẳng phức, do đó hệ thống không ổn định .

Trường hợp đặc biệt 2:

Nếu bảng Routh có tất cả các hệ số của hàng nào đó bằng 0:

+ Thành lập đa thức phụ từ các hệ số của hàng trước hàng có tất cả các hệ số bằng 0, gọi đa thức đó là $A_0(s)$.

+ Thay hàng có tất cả các hệ số bằng 0 bởi một hàng khác có các hệ số chính là các hệ số của đa thức $dA_0(s)/ds$, sau đó quá trình tính toán tiếp tục.

Chú ý: Nghiệm của đa thức phụ $A_0(s)$ cũng chính là nghiệm của phương trình đặc trưng.

Ví dụ 5: Xét tính ổn định của hệ thống có phương trình đặc trưng

$$s^5 + 4s^4 + 8s^3 + 8s^2 + 7s + 4 = 0$$

Bài giải:

Bảng Routh

	s^5	1	8	7
	s^4	4	8	4
$\alpha_3 = \dfrac{1}{4}$	s^3	$8 - \dfrac{1}{4} \times 8 = 6$	$7 - \dfrac{1}{4} \times 4 = 6$	0
$\alpha_4 = \dfrac{4}{6}$	s^2	$8 - \dfrac{4}{6} \times 6 = 4$	4	
$\alpha_5 = \dfrac{6}{4}$	s^1	$6 - \dfrac{6}{4} \times 4 = 0$	0	
$\Rightarrow$	s^1	8	0	
$\alpha_6 = \dfrac{4}{8}$	s^0	$4 - \dfrac{4}{8} \times 0 = 4$		

Đa thức phụ: $A_0(s) = 4s^2 + 4 \qquad \rightarrow \dfrac{dA_0(s)}{ds} = 8s + 0$

Nghiệm của đa thức phụ (cũng chính là nghiệm của phương trình đặc trưng:

$$A_0(s) = 4s^2 + 4 = 0 \qquad \rightarrow s = \pm j$$

Kết luận:

+ Các hệ số cột 1 bảng Routh không đổi dấu nên phương trình đặc trưng không có nghiệm nằm bên phải mặt phẳng phức.

+ Phương trình đặc tính có 2 nghiệm nằm trên trục ảo.

+ Số nghiệm nằm bên trái mặt phẳng phức là 5 – 2 = 3

Hệ thống ở biên giới ổn định

3.2.3. Tiêu chuẩn Hurwitz

Cho hệ thống có phương trình đặc trưng:

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1} s + a_n = 0$$

Muốn xét tính ổn định của hệ thống theo tiêu chuẩn Hurwitz, trước tiên ta thành lập ma trận Hurwitz theo qui tắc:

+ Ma trận Hurwitz là ma trận vuông cấp n×n.

+ Đường chéo của ma trận Hurwitz là các hệ số từ a_1 đến a_n.

+ Hàng lẻ của ma trận Hurwitz gồm các hệ số có chỉ số lẻ theo thứ tự tăng dần nếu ở bên phải đường chéo và giảm dần nếu ở bên trái đường chéo.

+ Hàng chẵn của ma trận Hurwitz gồm các hệ số có chỉ số chẵn theo thứ tự tăng dần nếu ở bên phải đường chéo và giảm dần nếu ở bên trái đường chéo.

- Dạng ma trận Hurwitz

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \ldots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \ldots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \ldots & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & & & & & a_n \end{bmatrix}$$

- Phát biểu tiêu chuẩn

Điều kiện cần và đủ để hệ thống ổn định là tất cả các định thức con chứa đường chéo của ma trận Hurwitz đều dương

- Ví dụ 1: Xét tính ổn định của hệ thống có phương trình đặc trưng

$$x^3 + 4x^2 + 3x + 2 = 0$$

Bài giải:

Ma trận Hurwitz

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Các định thức:

$$\Delta_1 = a_1 = 4$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 4.3 - 2.1 = 10$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = a_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = 2.\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2(4.3 - 2.1) = 20$$

Kết luận: Hệ thống ổn định do các định thức đều dương

- Các hệ quả của tiêu chuẩn Hurwitz

+ Hệ bậc 2 ổn định nếu phương trình đặc trưng thỏa mãn điều kiện:

$$a_i > 0; i = \overline{0,2}$$

+ Hệ bậc 3 ổn định nếu phương trình đặc trưng thỏa mãn điều kiện:

$$\begin{cases} a_i > 0; i = \overline{0,3} \\ a_1 a_3 - a_0 a_2 > 0 \end{cases}$$

+ Hệ bậc 4 ổn định nếu phương trình đặc trưng thỏa mãn điều kiện:

$$\begin{cases} a_i > 0; i = \overline{0,4} \\ a_1 a_3 - a_0 a_2 > 0 \\ a_1 a_2 a_3 - a_0 a_3^2 - a_1^2 a_4 > 0 \end{cases}$$

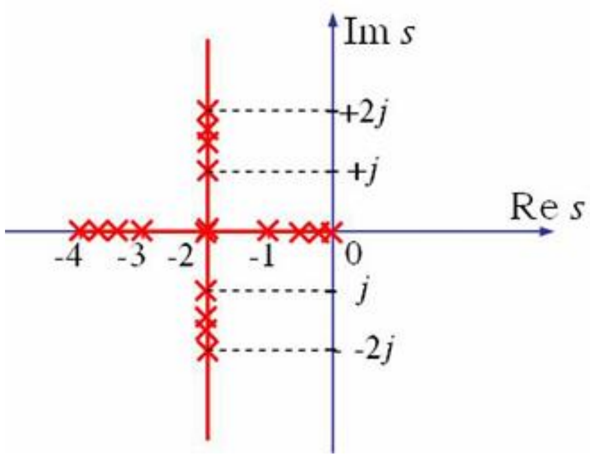
3.3. Phương pháp quỹ đạo nghiệm số (QĐNS)

3.3.1. Khái niệm về quĩ đạo nghiệm số

Quỹ đạo nghiệm số là tập hợp tất cả các nghiệm của phương trình đặc trưng của hệ thống khi có một thông số nào đó trong hệ thay đổi từ $0 \div \infty$.

Ví dụ: Quỹ đạo nghiệm số của hệ thống có phương trình đặc trưng $s^2 + 4s + K = 0$ có dạng như hình vẽ dưới đây:

$K = 0$	$s_1 = 0$	$s_2 = -4$
$K = 1$	$s_1 = -0{,}268$	$s_2 = -3{,}732$
$K = 2$	$s_1 = -0{,}586$	$s_2 = -3{,}414$
$K = 3$	$s_1 = -1$	$s_2 = -3$
$K = 4$	$s_1 = -2$	$s_2 = -2$
$K = 5$	$s_1 = -2 + j$	$s_2 = -2 - j$
$K = 6$	$s_1 = -2 + j1{,}41$	$s_2 = -2 - j1{,}41$
$K = 7$	$s_1 = -2 + j1{,}73$	$s_2 = -2 - j1{,}73$
$K = 8$	$s_1 = -2 + j2$	$s_2 = -2 - j2$
…		



3.3.2. Phương pháp vẽ QĐNS

Muốn áp dụng các qui tắc vẽ quỹ đạo nghiệm số, trước tiên ta phải biến đổi tương đương phương trình đặc trưng về dạng:

$$1 + K\frac{N(s)}{D(s)} = 0$$

Đặt: $G_0(s) = K\dfrac{N(s)}{D(s)}$

Gọi n là số cực của $G_0(s)$, m là số zero của $G_0(s)$

$$1 + G_0(s) = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} |G_0(s)| = 1 \\ \angle G_0(s) = (2l+1)\pi \end{cases}$$ Điều kiện về biên độ và điều kiện pha

Qui tắc vẽ QĐNS

Qui tắc 1: Số nhánh của quỹ đạo nghiệm số bằng bậc của phương trình đặc tính bằng số cực của phương trình $G_0(s) = n$.

Qui tắc 2:

+ Khi K = 0: các nhánh của quỹ đạo nghiệm số xuất phát từ các cực của $G_0(s)$.

+ Khi K tiến đến $+\infty$: m nhánh của quỹ đạo nghiệm số tiến đến m zero của $G_0(s)$, n-m nhánh còn lại tiến đến ∞ theo các tiệm cận xác định bởi qui tắc 5 và qui tắc 6.

Qui tắc 3: Quỹ đạo nghiệm số đối xứng qua trục thực.

Qui tắc 4: Một điểm trên trục thực thuộc về quỹ đạo nghiệm số nếu tổng số cực và zero của $G_0(s)$ bên phải nó là một số lẻ.

Qui tắc 5: Góc tạo bởi các đường tiệm cận của quỹ đạo nghiệm số với trục thực xác định bởi :

$$\alpha = \frac{(2l+1)\pi}{n-m} \qquad \text{với } l = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$$

Qui tắc 6: Giao điểm giữa các tiệm cận với trục thực là điểm A có tọa độ xác định bởi:

$$OA = \frac{\sum pole - \sum zero}{n-m} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{i=1}^{m} z_i}{n-m}$$

Trong đó: (p_i và z_i là các pole và các zero của $G_0(s)$)

Qui tắc 7: Điểm tách nhập (nếu có) của quỹ đạo nghiệm số nằm trên trục thực và là nghiệm của phương trình:

$$\frac{dK}{ds} = 0$$

Qui tắc 8: Giao điểm của quỹ đạo nghiệm số với trục ảo có thể xác định bằng cách áp dụng tiêu chuẩn Routh–Hurwitz hoặc thay $s = j\omega$ vào phương trình đặc trưng.

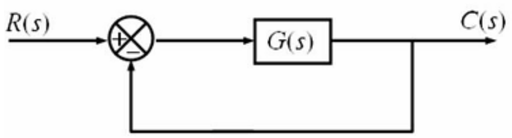
Qui tắc 9: Góc xuất phát của quỹ đạo nghiệm số tại cực phức p_j được xác định bởi:

$$\theta_j = 180^o + \sum_{i=1}^{m} \arg(p_j - z_i) - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \arg(p_j - p_i)$$

Dạng hình học trên của công thức

$\theta = 180^o$ + (Σ góc từ các zero đến cực p_j) - (Σ góc từ các cực còn lại đến cực p_j)

Ví dụ 1: Vẽ QĐNS của hệ thống sau đây khi $K = 0 \to \infty$.



$$G(s) = \frac{K}{s(s+2)(s+3)}$$

Giải:

Phương trình đặc trưng của hệ thống:

$$1 + G(s) = 0 \to 1 + \frac{K}{s(s+2)(s+3)} = 0$$

Các cực: $p_1 = 0$, $p_2 = -2$, $p_3 = -3$

Các zero: không có

Tiệm cận:

$$\alpha = \frac{(2l+1)\pi}{n-m} = \frac{(2l+1)\pi}{n-m} \quad \rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \dfrac{\pi}{3} \\ \alpha_2 = -\dfrac{\pi}{3} \\ \alpha_3 = \pi \end{cases}$$

$$OA = \frac{\sum Pole - \sum Zero}{n-m} = \frac{[0+(-2)+(-3)]-0}{3-0} = -\frac{5}{3}$$

Điểm tách nhập:

$$K = -s(s+2)(s+3) = -(s^3+5s^2+6s)$$

$$\frac{dK}{ds} = -(3s^2+10s+6)$$

$$\frac{dK}{ds} = 0 \quad \rightarrow \begin{cases} s_1 = -2{,}549 \\ s_2 = -0{,}785 \end{cases} \quad \rightarrow \text{loại}$$

Giao điểm của QĐNS với trục ảo:

Cách 1: Dùng tiêu chuẩn Hurwitz

$$s^3+5s^2+6s+K = 0 \quad (*)$$

Điều kiện ổn định:

$$\begin{cases} K > 0 \\ a_1a_2 - a_0a_3 > 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} K > 0 \\ 5.6 - 1.K > 0 \end{cases} \leftrightarrow \quad 0 < K < 30$$

$K_{gh} = 30$ thay vào phương trình (*) giải phương trình tìm được giao điểm QĐNS với trục ảo

$$s^3+5s^2+6s+30 = 0 \quad \leftrightarrow \begin{cases} s_1 = -5 \\ s_2 = j\sqrt{6} \\ s_3 = -j\sqrt{6} \end{cases}$$

Giao điểm với trục ảo là các nghiệm chỉ có phần ảo (s_2 và s_3) với s_1 = -5, giao điểm tại gốc tọa độ

Cách 2:

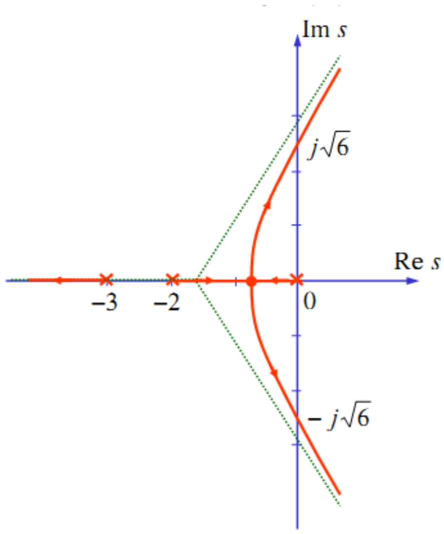
$$s^3+5s^2+6s+K = 0$$

Thay $s = j\omega$ vào phương trình

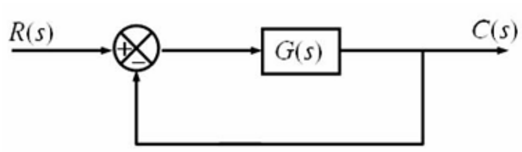
$$(j\omega)^3+5(j\omega)^2+6(j\omega)+K = 0$$

$$-j\omega^3-5\omega^2+6j\omega+K = 0$$

$$\begin{cases} -j\omega^3+6j\omega = 0 \\ -5\omega^2+K = 0 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \omega = 0 \\ K = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \omega = \pm\sqrt{6} \\ K = 30 \end{cases} \end{array}\right.$$



Ví dụ 2: Vẽ QĐNS của hệ thống sau đây khi K= 0 ⟶ +∞



$$G(s) = \frac{K}{s(s^2 + 8s + 20)}$$

Giải:

Phương trình đặc trưng của hệ thống:

$$1 + G(s) = 0$$

$$1 + \frac{K}{s(s^2 + 8s + 20)} = 0$$

Các cực: $p_1 = 0$, $p_{2,3} = -4 \pm j2$

Các zero: không

Tiệm cận :

$$\alpha = \frac{(2l+1)\pi}{n-m} = \frac{(2l+1)\pi}{n-m} \quad \rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \dfrac{\pi}{3} \\ \alpha_2 = -\dfrac{\pi}{3} \\ \alpha_3 = \pi \end{cases}$$

- Giao điểm các tiệm cận với trục thực (Re s):

$$OA = \frac{\sum \text{Pole} - \sum \text{Zero}}{n-m}$$

$$OA = \frac{[0 + (-4 + j2) + (-4 - j2)] - 0}{3 - 0} = -\frac{8}{3}$$

- Điểm tách nhập các đường QĐNS

$$K = -s(s^2 + 8s + 20) = -(s^3 + 8s^2 + 20s)$$

$$\frac{dK}{ds} = -(3s^2 + 16s + 20)$$

$$\frac{dK}{ds} = 0 \quad \rightarrow \begin{cases} s_1 = -3{,}33 \\ s_2 = -2 \end{cases}$$ Hai điểm tách nhập

- Giao điểm của QĐNS với trục ảo:

$$s^3 + 8s^2 + 20s + K = 0$$

Thay s = jω vào phương trình

$$(j\omega)^3 + 8(j\omega)^2 + 20(j\omega) + K = 0$$

$$-j\omega^3 - 8\omega^2 + 20j\omega + K = 0$$

$$\begin{cases} -j\omega^3 + 20j\omega = 0 \\ -8\omega^2 + K = 0 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \omega = 0 \\ K = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \omega = \pm\sqrt{20} \\ K = 160 \end{cases} \end{array}\right.$$

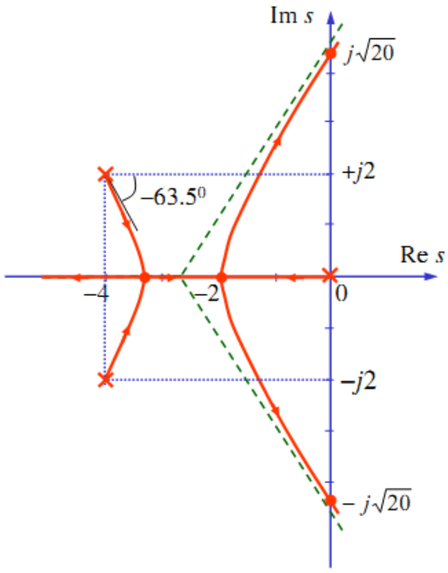
- Góc xuất phát của QĐNS tại cực phức p_2:

$$\theta_2 = 180^\circ - [\arg(p_2 - p_1) - \arg(p_2 - p_3)]$$

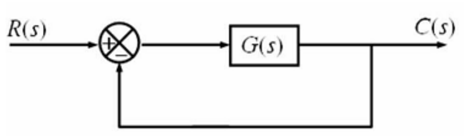
$$\theta_2 = 180^\circ - [\arg((-4 + j2) - 0) - \arg(-4 + j2 - (-4 - j2))]$$

$$\theta_2 = 180^\circ - [tg^{-1}(\frac{2}{-4}) + 90]$$

$$\theta_2 = 180^\circ - [153{,}5 + 90] = -63{,}5^\circ$$



Ví dụ 3: Vẽ QĐNS của hệ thống sau đây khi K = 0 → +∞



$$G(s) = \frac{K(s+1)}{s(s+3)(s^2+8s+20)}$$

Giải:

Phương trình đặc trưng của hệ thống:

$$1 + G(s) = 0$$

$$1 + \frac{K(s+1)}{s(s+3)(s^2+8s+20)} = 0$$

$$s(s+3)(s^2+8s+20) + K(s+1) = 0$$

Các cực: $p_1 = 0$, $p_2 = -3$, $p_{3,4} = -4 \pm j2$

Các zero: $z_1 = -1$

Tiệm cận

$$\alpha = \frac{(2l+1)\pi}{n-m} = \frac{(2l+1)\pi}{n-m} \rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \dfrac{\pi}{3} \\ \alpha_2 = -\dfrac{\pi}{3} \\ \alpha_3 = \pi \end{cases}$$

$$OA = \frac{\sum Pole - \sum Zero}{n-m} = \frac{[0+(-3)+(-4+j2)+(-4-j2)]-(-1)}{4-1} = -\frac{10}{3}$$

- Điểm tách nhập

$$K = \frac{s(s+3)(s^2+8s+20)}{(s+1)}$$

$$\frac{dK}{ds} = \frac{3s^4+26s^3+77s^2+88s+60}{(s+1)^2}$$

$$\frac{dK}{ds} = 0 \rightarrow \begin{cases} s_{1,2} = -3{,}67 \pm j1{,}05 \\ s_{3,4} = -0{,}66 \pm j0{,}97 \end{cases} \rightarrow \text{Không có điểm tách nhập}$$

- Giao điểm của QĐNS với trục ảo:

$$s^4 + 11s^3 + 44s^2 + (60+K)s + K = 0$$

Thay $s = j\omega$

$$(j\omega)^4 + 11(j\omega)^3 + 44(j\omega)^2 + (60+K)(j\omega) + K = 0$$

$$\omega^4 - 11j\omega^3 - 44\omega^2 + (60+K)j\omega + K = 0$$

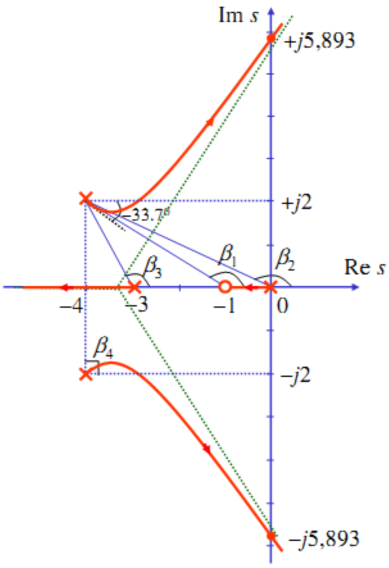
$$\begin{cases} \omega^4 - 44\omega^2 + \mathrm{K} = 0 \\ -11\omega^3 + (60+\mathrm{K})\omega = 0 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \omega = 0 \\ \mathrm{K} = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \omega = 5{,}893 \\ \mathrm{K} = 322 \end{cases} \\ \begin{cases} \omega = \pm \mathrm{j}1{,}314 \\ \mathrm{K} = -61{,}7 \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy giao điểm cần tìm là s = ± j5,993 và HSKĐ giới hạn K_{gh} = 322

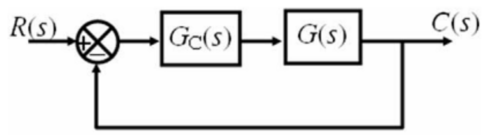
- Góc xuất phát của QĐNS tại cực phức p_3:

$$\theta_3 = 180 + \beta_1 - (\beta_2 + \beta_3 + \beta_4) = 180 + 146{,}3 - (153{,}4 + 116{,}6 + 90)$$

$$\theta_3 = -33{,}7^o$$



Ví dụ 4: Cho hệ thống điều khiển có sơ đồ khối như sau



$$G(s) = \frac{10}{s^2 + 9s + 3} \qquad\qquad G_C(s) = K_P + \frac{K_I}{s}$$

Cho K_I = 2.7, hãy vẽ QĐNS của hệ thống sau đây khi $K_P = 0 \rightarrow +\infty$, biết rằng $dK_P / ds = 0$ có 3 nghiệm là -3; - 3; 1,5.

Khi K_P =270, K_I = 2.7 hệ thống có ổn định hay không?

Giải:

Phương trình đặc trưng của hệ thống:

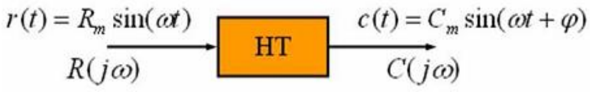
$$1 + G_C(s)G(s) = 0$$

$$1 + \left(K_P + \frac{2{,}7}{s}\right)\frac{10}{s^2 + 9s + 3} = 0$$

3.4. Tiêu chuẩn ổn định tần số

3.4.1. Khái niệm đặc tính tần số

Hệ thống tuyến tính: khi tín hiệu vào là tín hiệu hình sin thì ở trạng thái xác lập tín hiệu ra cũng là tín hiệu hình sin cùng tần số với tín hiệu vào, khác biên độ và pha.



Định nghĩa: Đặc tính tần số của hệ thống là tỉ số giữa tín hiệu ra ở trạng thái xác lập và tín hiệu vào hình sin.

$$\text{Đặc tính tần số} = \frac{C(j\omega)}{R(j\omega)}$$

Người ta chứng minh được:

$$\text{Đặc tính tần số} = G(s)\big|_{s=j\omega} = G(j\omega)$$

3.4.2. Đáp ứng biên độ – Đáp ứng pha

Tổng quát G(jω) là một hàm phức nên có thể biểu diễn dưới dạng đại số hoặc dạng cực:

$$G(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega) = M(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

Trong đó:

$$M(\omega) = |G(j\omega)| = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)} \qquad \text{Đáp ứng biên độ}$$

$$\varphi(\omega) = \angle G(j\omega) = tg^{-1}\left|\frac{Q(\omega)}{P(\omega)}\right| \qquad \text{Đáp ứng pha}$$

Ý nghĩa vật lý:

+ Đáp ứng biên độ cho biết tỉ lệ về biên độ (hệ số khuếch đại) giữa tín hiệu ra và tín hiệu vào theo tần số.

+ Đáp ứng pha cho biết độ lệch pha giữa tín hiệu ra và tín hiệu vào theo tần số.

3.4.3. Biểu đồ Bode – Biểu đồ Nyquist

Biểu đồ Bode: là hình vẽ gồm 2 thành phần:

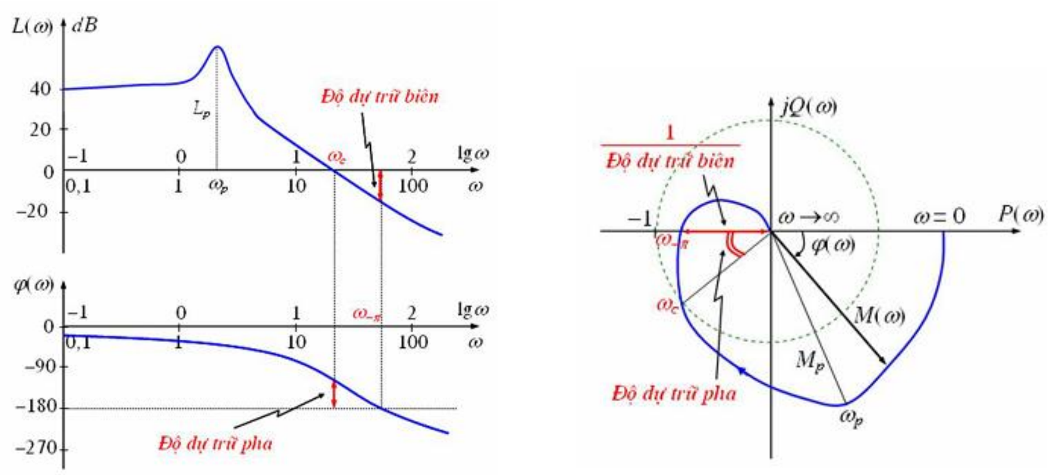
Biểu đồ Bode về biên độ: là đồ thị biểu diễn mối quan hệ giữa logarith của đáp ứng biên độ L(ω) theo tần số ω

$$L(\omega) = 20\lg M(\omega) \quad [\text{dB}]$$

Biểu đồ Bode về pha: là đồ thị biểu diễn mối quan hệ giữa đáp ứng pha φ(ω) theo tần số ω.

Cả hai đồ thị trên đều được vẽ trong hệ tọa độ vuông góc với trục hoành ω được chia theo thang logarith cơ số 10.

Biểu đồ Nyquist: (đường cong Nyquist) là đồ thị biểu diễn đặc tính tần số G(jω) trong hệ tọa độ cực khi ω thay đổi từ 0 → ∞.



Hình (): Biểu đồ Bode và biểu đồ Nyquist

3.4.4. Đặc tính tần số của các khâu cơ bản

- Đặc tính tần số của các khâu cơ bản:

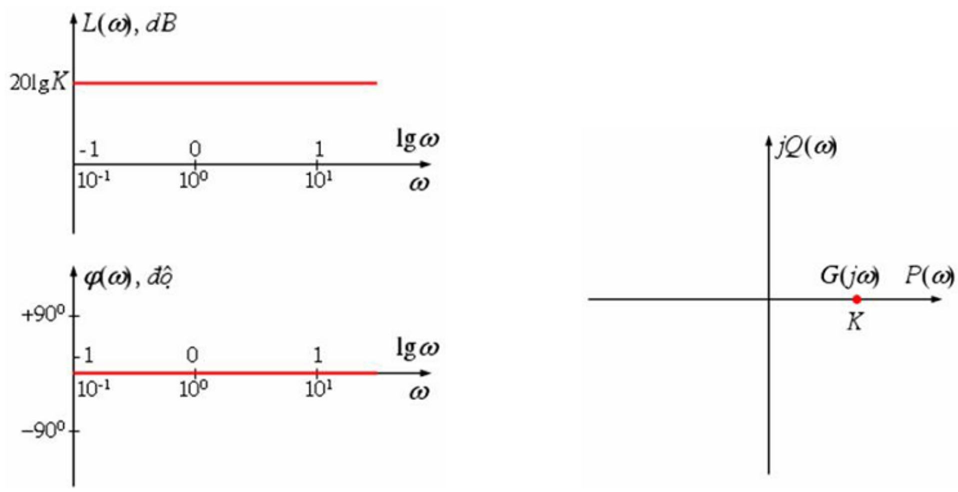
Khâu tỉ lệ:

Hàm truyền: $G(s) = K$

Đặc tính tần số: $G(j\omega) = K$

Biên độ: $M(\omega) = K \quad \rightarrow L(\omega) = 20\lg K$

Pha: $\varphi(\omega) = 0$



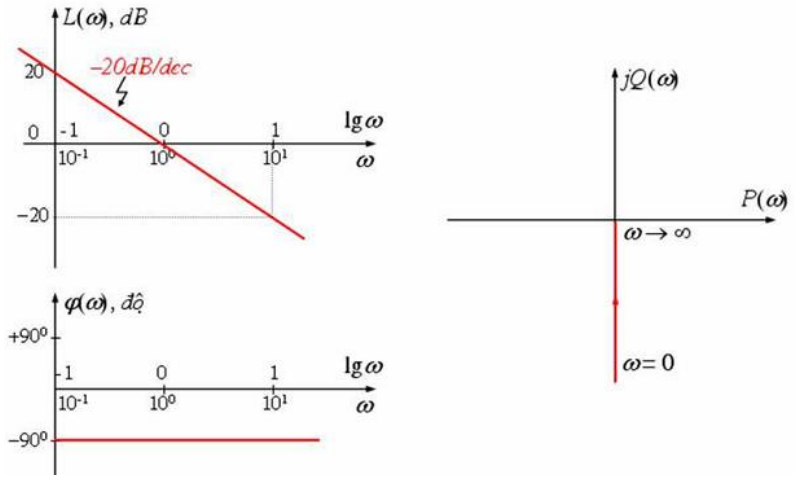
Khâu tích phân lý tưởng

Hàm truyền: $G(s) = \dfrac{1}{s}$

Đặc tính tần số: $G(j\omega) = \dfrac{1}{j\omega} = -j\dfrac{1}{\omega}$

Biên độ: $M(\omega) = \dfrac{1}{\omega} \quad \rightarrow L(\omega) = -20\lg(\omega)$

Pha: $\varphi(\omega) = -90^o$



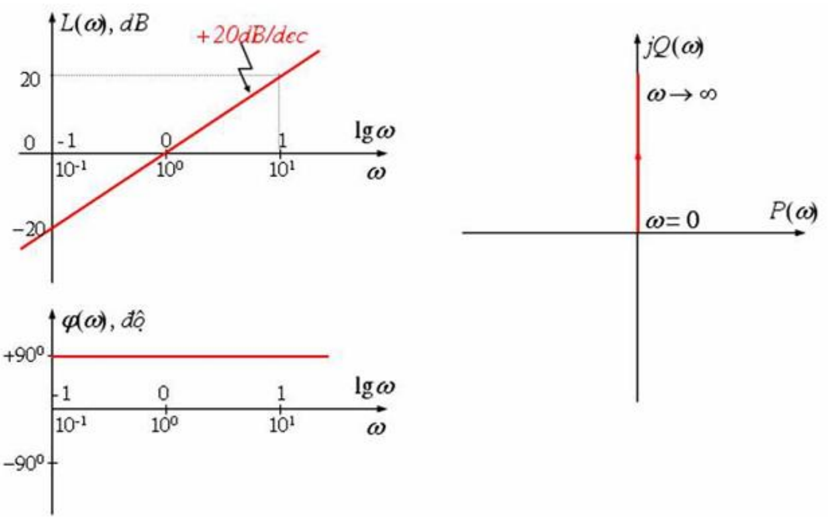
Khâu vi phân lý tưởng

Hàm truyền: $G(s) = s$

Đặc tính tần số: $G(j\omega) = j\omega$

Biên độ: $M(\omega) = \omega \quad \rightarrow L(\omega) = 20\lg(\omega)$

Pha: $\varphi(\omega) = 90^o$



Khâu quán tính bậc 1

Hàm truyền: $G(s) = \dfrac{1}{Ts+1}$

Đặc tính tần số: $G(j\omega) = \dfrac{1}{Tj\omega + 1} = \dfrac{K(1 - Tj\omega\_}{1 + T^2\omega^2}$

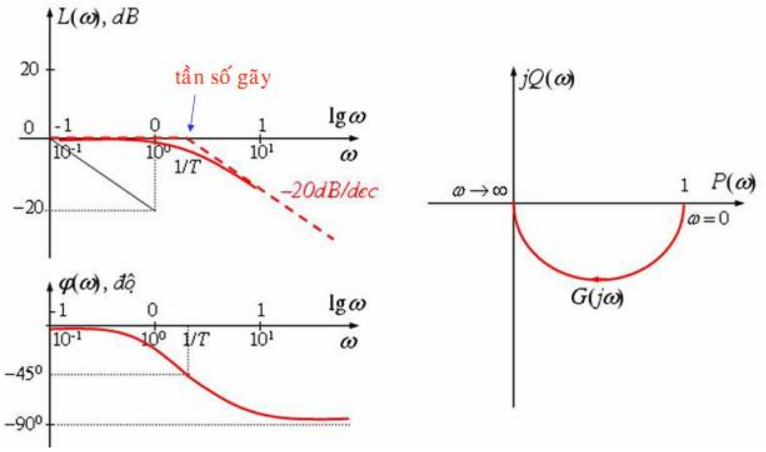
Biên độ: $M(\omega) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + T^2\omega^2}} \rightarrow L(\omega) = -20\lg\sqrt{1 + T^2\omega^2}$

Pha: $\varphi(\omega) = tg^{-1}(T\omega)$

Vẽ gần đúng biểu đồ biên độ

$\omega < \dfrac{1}{T}$ đường thẳng nằm ngang trùng trục hoành

$\omega > \dfrac{1}{T}$ đường thẳng có độ dốc -20dB/dec



Khâu sớm pha bậc 1

Hàm truyền: $G(s) = Ts + 1$

Đặc tính tần số: $G(j\omega) = Tj\omega + 1$

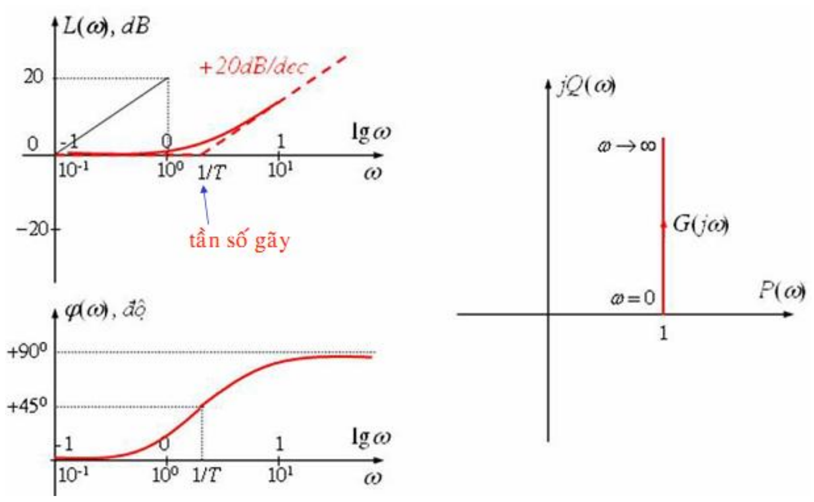
Biên độ: $M(\omega) = \sqrt{1 + T^2\omega^2} \rightarrow L(\omega) = 20\lg\sqrt{1 + T^2\omega^2}$

Pha: $\varphi(\omega) = tg^{-1}(T\omega)$

Vẽ gần đúng biểu đồ biên độ

$\omega < \dfrac{1}{T}$ đường thẳng nằm ngang trùng trục hoành

$\omega > \dfrac{1}{T}$ đường thẳng có độ dốc + 20dB/dec



Khâu dao động bậc 2

Hàm truyền: $G(s) = \dfrac{1}{T^2 s^2 + 2\zeta T s + 1}$ $\quad 0 < \zeta < 1$

Đặc tính tần số: $G(j\omega) = \dfrac{1}{-T^2\omega^2 + 2\zeta T j\omega + 1}$

Biên độ: $M(\omega) = \dfrac{1}{\sqrt{(1 - T^2\omega^2)^2 + 4\zeta^2 T^2 \omega^2}}$

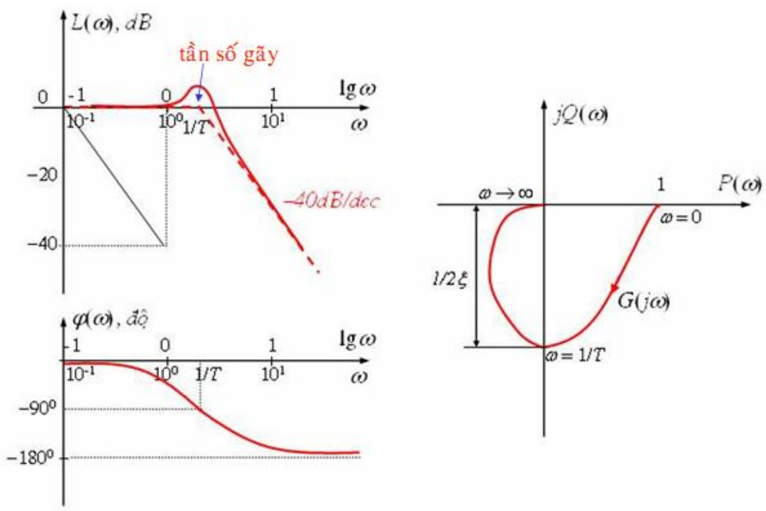
$$\rightarrow L(\omega) = -20\lg\sqrt{(1 - T^2\omega^2)^2 + 4\zeta^2 T^2\omega^2}$$

Pha: $\varphi(\omega) = tg^{-1}\left(\dfrac{2\zeta T\omega}{1 - T^2\omega^2}\right)$

Vẽ gần đúng biểu đồ biên độ

$\omega < \dfrac{1}{T}$ đường thẳng nằm ngang trùng trục hoành

$\omega > \dfrac{1}{T}$ đường thẳng có độ dốc - 40dB/dec



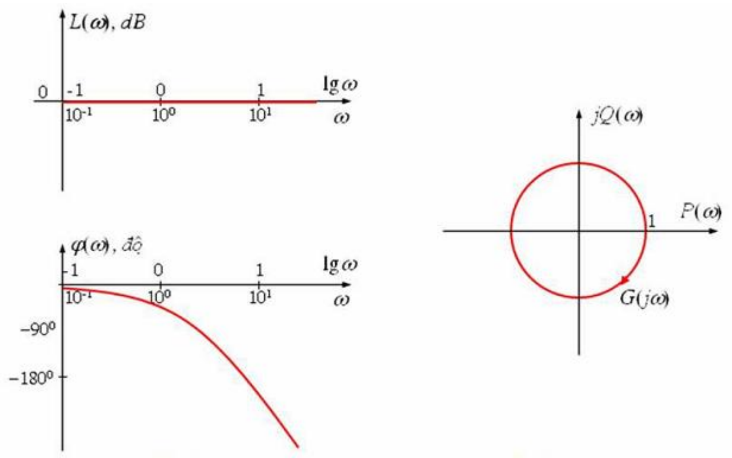
Khâu trì hoãn

Hàm truyền: $G(s) = e^{-Ts}$

Đặc tính tần số: $G(j\omega) = e^{-Tj\omega}$

Biên độ: $M(\omega) = 1 \quad \rightarrow L(\omega) = 0$

Pha: $\varphi(\omega) = -T\omega$



3.4.5. Đặc tính tần số của hệ thống tự động

Xét hệ thống tự động có hàm truyền G(s) có thể phân tích thành tích của các hàm truyền cơ bản như sau:

$$G(s) = \prod_{i=1}^{l} G_i(s)$$

Đặc tính tần số:

$$G(j\omega) = \prod_{i=1}^{l} G_i(j\omega)$$

Biên độ: $M(\omega) = \prod_{i=1}^{l} M_i(\omega) \quad \rightarrow \quad L(\omega) = \sum_{i=1}^{l} L_i(\omega)$

Pha: $\varphi(\omega) = \sum_{i=1}^{l} \varphi_i(\omega)$

Biểu đồ Bode của hệ thống (gồm nhiều khâu ghép nối tiếp) bằng tổng biểu đồ Bode của các khâu thành phần

Vẽ gần đúng biểu đồ Bode biên độ bằng đường tiệm cận

Giả sử hàm truyền của hệ thống có dạng:

$$G(s) = K.s^{\alpha} G_1(s) G_2(s) G_3(s)...$$

$\alpha > 0$: hệ thống có khâu vi phân lý tưởng

$\alpha < 0$: hệ thống có khâu tích phân lý tưởng

Bước 1: Xác định tất cả các tần số gãy $\omega_i = 1/T_i$, và sắp xếp theo thứ tự tăng dần $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3 \ldots$

Bước 2: Biểu đồ Bode gần đúng qua điểm A có tọa độ:

$$\begin{cases}\omega=\omega_0\\ L(\omega)=20\lg K+\alpha 20\lg\omega_0\end{cases}$$

ω_0 là tần số thỏa mãn $\omega_0 < \omega_1$. Nếu $\omega_1 > 1$ thì có thể chọn $\omega_0 = 1$.

Bước 3: Qua điểm A, vẽ đường thẳng có độ dốc:

(- 20 dB/dec × α) nếu G(s) có α khâu tích phân lý tưởng

(+ 20 dB/dec × α) nếu G(s) có α khâu vi phân lý tưởng

Đường thẳng này kéo dài đến tần số gãy kế tiếp.

Bước 4: Tại tần số gãy $\omega_i = 1/T_i$, độ dốc của đường tiệm cận được cộng thêm một lượng:

(-20dB/dec × β_i) nếu $G_i(s)$ là β_i khâu quán tính bậc 1

(+20dB/dec × β_i) nếu $G_i(s)$ là β_i khâu sớm pha bậc 1

(-40dB/dec × β_i) nếu $G_i(s)$ là β_i khâu dao động bậc 2

(+40dB/dec × β_i) nếu $G_i(s)$ là β_i khâu sớm pha bậc 2

Đường thẳng này kéo dài đến tần số gãy kế tiếp.

Bước 5: Lặp lại bước 4 cho đến khi vẽ xong đường tiệm cận tại tần số gãy cuối cùng.

Ví dụ: Vẽ biểu đồ Bode biên độ gần đúng của hệ thống có hàm truyền:

$$G(s)=\frac{100(0,1s+1)}{s(0,01s+1)}$$

Dựa vào biểu đồ Bode gần đúng, hãy xác định tần số cắt biên của hệ thống.

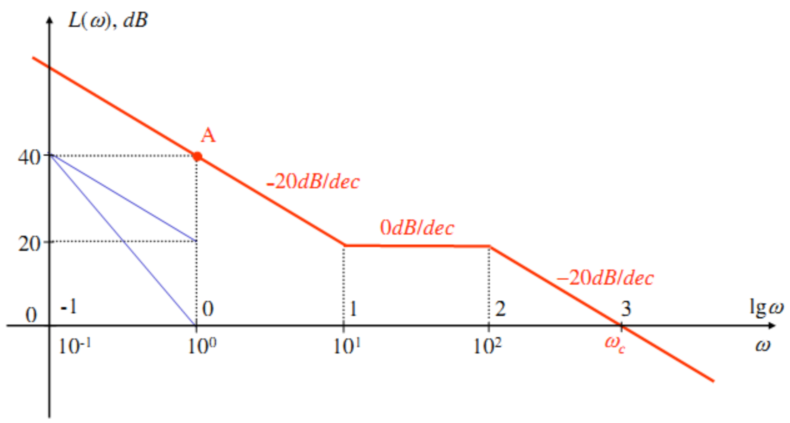
Giải:

Các tần số gãy:

$$\omega_1=\frac{1}{T_1}=\frac{1}{0,1}=10(rad/s)$$

$$\omega_2=\frac{1}{T_2}=\frac{1}{0,01}=100(rad/s)$$

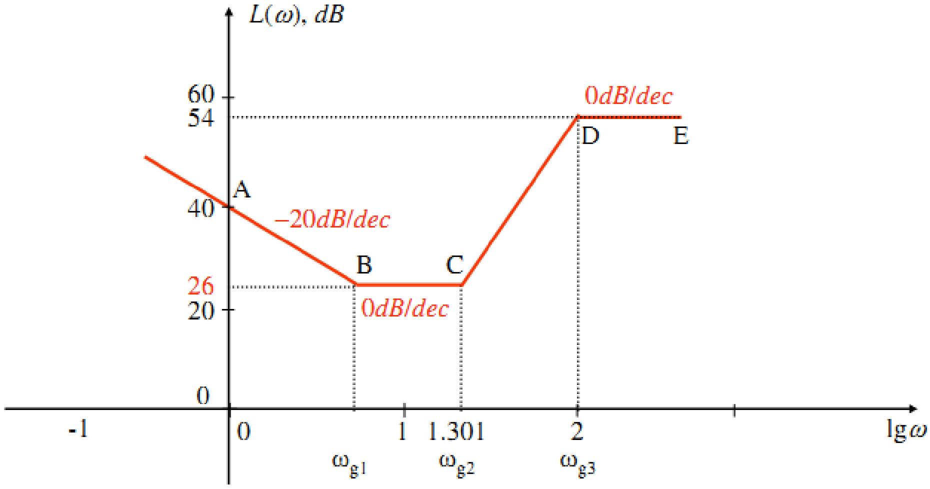
Biểu đồ Bode qua điểm A có tọa độ $\begin{cases}\omega=1\\ L(\omega)=20\lg K=20\lg 100=40\end{cases}$



Theo hình vẽ, tần số cắt biên của hệ thống là 10^3 rad/sec

Ví dụ: Xác định hàm truyền dựa vào biểu đồ Bode

Xác định hàm truyền của hệ thống có biểu đồ Bode biên độ gần đúng như sau:



Giải:

- Độ dốc đoạn CD: $\dfrac{54-26}{2-1{,}301} = 40(dB/s)$

- Các tần số gãy:

$$\lg\omega_1 = 0 + \frac{40-26}{20} = 0{,}7 \quad \rightarrow \quad \omega_1 = 10^{0{,}7} = 5(rad/s)$$

$$\lg\omega_2 = 1{,}301 \quad \rightarrow \quad \omega_2 = 10^{1{,}301} = 20(rad/s)$$

$$\lg\omega_3 = 2 \quad \rightarrow \quad \omega_3 = 10^{2} = 100(rad/s)$$

Hàm truyền cần tìm có dạng:

$$G(s) = \frac{K(T_1 s+1)(T_2 s+1)^2}{s(T_3 s+1)^2}$$

$$20\lg K = 40 \rightarrow K = 100$$

$$T_1 = \frac{1}{\omega_1} = \frac{1}{5} = 0{,}2$$

$$T_2 = \frac{1}{\omega_2} = \frac{1}{20} = 0{,}05$$

$$T_3 = \frac{1}{\omega_3} = \frac{1}{100} = 0{,}01$$

3.4.6. Các thông số quan trọng của đặc tính tần số

Tần số cắt biên (ω_c): là tần số mà tại đó biên độ của đặc tính tần số bằng 1 (hay bằng 0 dB).

$$M(\omega_c) = 1 \quad \rightarrow \quad L(\omega_c) = 0$$

Tần số cắt pha ($\omega_{-\pi}$): là tần số mà tại đó pha của đặc tính tần số bằng -180° (hay bằng -π radian)

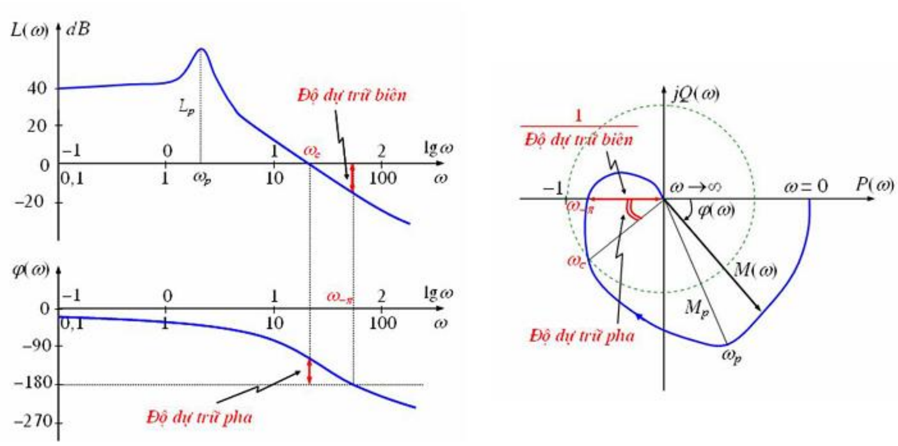
$$\varphi(\omega_{-\pi}) = -180^o \qquad \rightarrow \qquad \varphi(\omega_{-\pi}) = -\pi(rad)$$

Độ dự trữ biên (GM – Gain Margin):

$$GM = \frac{1}{M(\omega_{-\pi})} \qquad \rightarrow \qquad GM = -L(\omega_{-\pi})$$

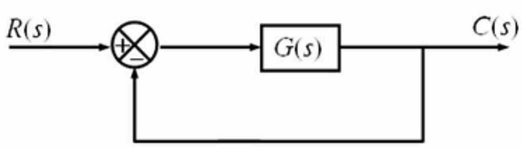
Độ dự trữ pha (FM – Phase Margin):

$$\Phi M = 180^o + \varphi(\omega_c)$$



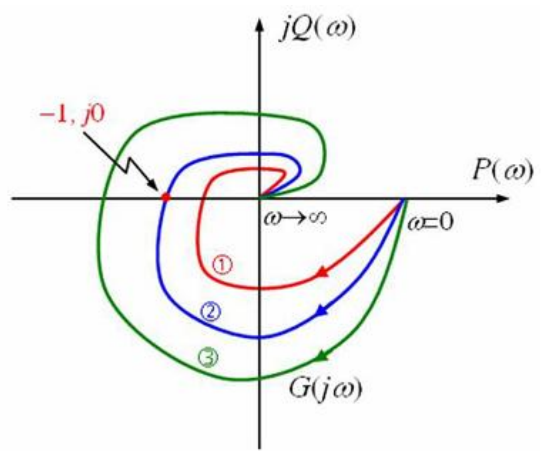
3.4.7. Tiêu chuẩn ổn định Nyquist

Cho hệ thống hồi tiếp âm đơn vị, biết đặc tính tần số của hệ hở G(s), bài toán đặt ra là xét tính ổn định của hệ thống kín $G_k(s)$.



Tiêu chuẩn Nyquist: Hệ thống kín $G_k(s)$ ổn định nếu đường cong Nyquist của hệ hở G(s) bao điểm (-1, j0) l/2 vòng theo chiều dương (ngược chiều kim đồng hồ) khi ω thay đổi từ 0 đến +∞, trong đó *l* là số cực nằm bên phải mặt phẳng phức của hệ hở G(s)

Ví dụ: Cho hệ thống hồi tiếp âm đơn vị, trong đó hệ hở G(s) có đường cong Nyquist như hình vẽ. Biết rằng G(s) ổn định. Xét tính ổn định của hệ thống kín.



Giải:

Vì G(s) ổn định nên G(s) không có cực nằm bên phải mặt phẳng phức, do đó theo tiêu chuẩn Nyquist hệ kín ổn định nếu đường cong Nyquist G(jω) của hệ hở không bao điểm (-1, j0)

Trường hợp 1: G(jω) không bao điểm (-1, j0) → hệ kín ổn định.

Trường hợp 2: G(jω) qua điểm (-1, j0) → hệ kín ở biên giới ổn định;

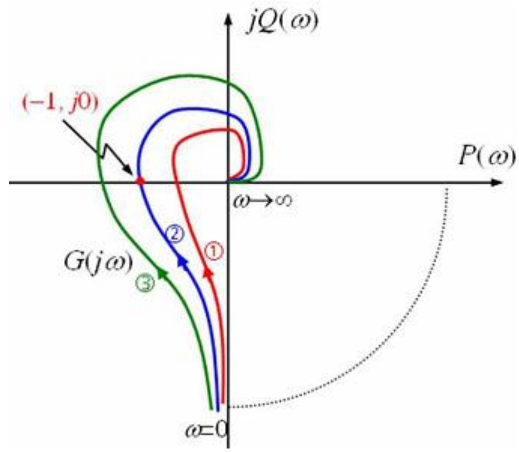
Trường hợp 3: G(jω) bao điểm (-1, j0) → hệ kín không ổn định.

Ví dụ 2: Hãy đánh giá tính ổn định của hệ thống hồi tiếp âm đơn vị, biết rằng hàm truyền hệ hở G(s) là:

$$G(s) = \frac{K}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)(T_3 s + 1)}$$

Giải:

Biểu đồ Nyquist:



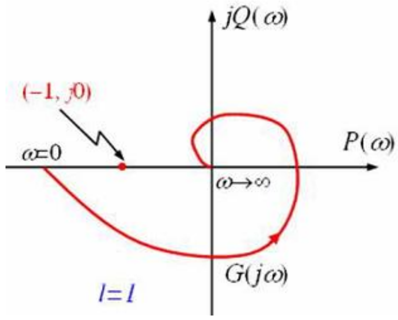
Vì G(s) không có cực nằm bên phải mặt phẳng phức, do đó theo tiêu chuẩn Nyquist hệ kín ổn định nếu đường cong Nyquist G(jω) của hệ hở không bao điểm (-1, j0)

Trường hợp 1: G(jω) không bao điểm (-1, j0) → hệ kín ổn định.

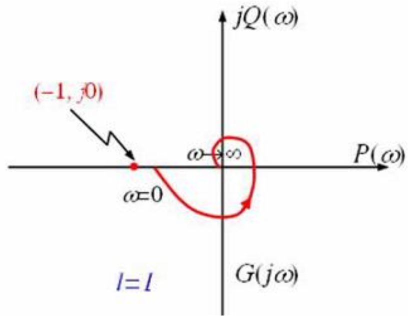
Trường hợp 2: G(jω) qua điểm (-1, j0) → hệ kín ở biên giới ổn định;

Trường hợp 3: G(jω) bao điểm (-1, j0) → hệ kín không ổn định.

Ví dụ 3: Cho hệ thống hở không ổn định có đặc tính tần số như các hình vẽ dưới đây. Hỏi trường hợp nào hệ kín ổn định.

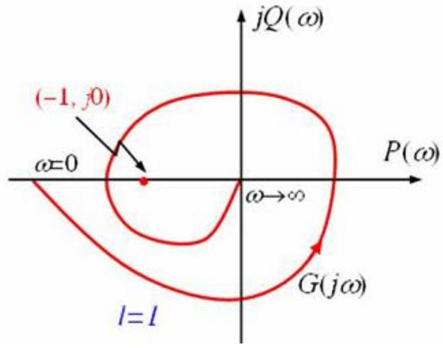


Ổn định



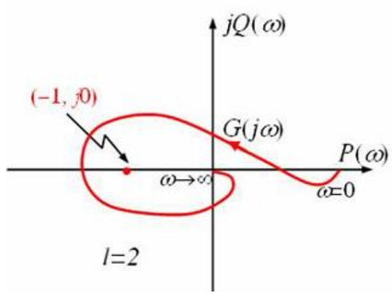
Không ổn định

Cho hệ thống hở không ổn định có đặc tính tần số như các hình vẽ dưới đây. Hỏi trường hợp nào hệ kín ổn định.

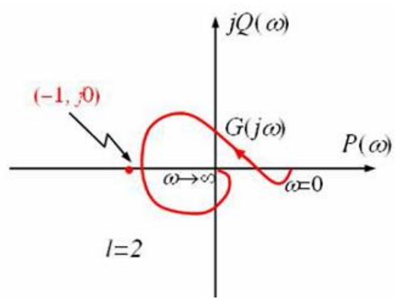


Không ổn định

Cho hệ thống hở không ổn định có đặc tính tần số như các hình vẽ dưới đây. Hỏi trường hợp nào hệ kín ổn định.



Ổn định



Không ổn định

Ví dụ 4: Cho hệ thống hở có hàm truyền đạt là:

$$G(s) = \frac{K}{(Ts+1)^n} \qquad (K > 0, T > 0, n > 2)$$

Tìm điều kiện của K và T để hệ thống kín (hồi tiếp âm đơn vị) ổn định.

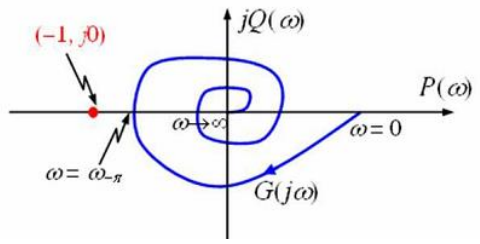
Giải:

Đặc tính tần số của hệ thống là: $G(j\omega)=\dfrac{K}{(Tj\omega+1)^n}$

Biên độ: $M(\omega)=\dfrac{1}{\left(\sqrt{1+T^2\omega^2}\right)^n}$

Pha: $\varphi(\omega)=-n.tg^{-1}(T\omega)$

Biểu đồ Nyquist:



Điều kiện ổn định: đường cong Nyquist không bao điểm (-1, j0). Theo biểu đồ Nyquist, điều này xảy ra khi:

$$M(\omega_{-\pi})<1$$

Ta có: $\varphi(\omega_{-\pi})=-n.tg^{-1}(T\omega_{-\pi})=-\pi$

$$\rightarrow tg^{-1}(T\omega_{-\pi})=\frac{\pi}{n} \quad \rightarrow \quad T\omega_{-\pi}=tg\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

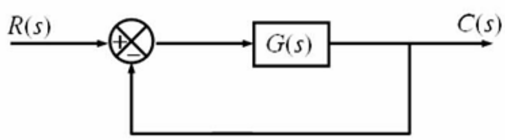
$$\rightarrow \omega_{-\pi}=\frac{1}{T}tg\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

Do đó: $M(\omega_{-\pi})<1 \quad \rightarrow \quad \dfrac{K}{\left(\sqrt{T^2\left(\frac{1}{T}tg\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)^2+1}\right)^n}<1$

$$\rightarrow \quad K<\left(\sqrt{T^2\left(\frac{1}{T}tg\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)^2+1}\right)^n$$

3.4.8. Tiêu chuẩn ổn định Bode

Cho hệ thống hồi tiếp âm đơn vị, biết đặc tính tần số của hệ hở G(s), bài toán đặt ra là xét tính ổn định của hệ thống kín $G_k(s)$.

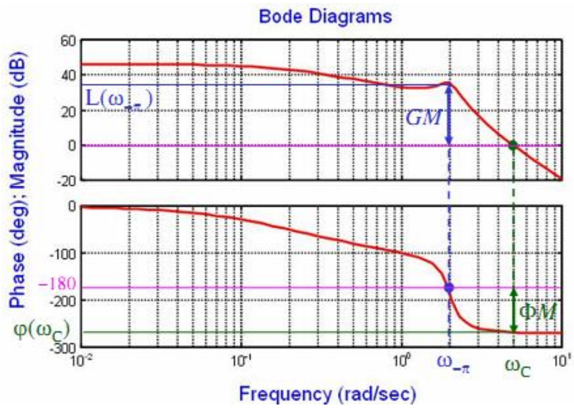


Tiêu chuẩn Bode: Hệ thống kín Gk(s) ổn định nếu hệ thống hở G(s) có độ dự trữ biên và độ dự trữ pha dương.

$$\begin{cases} GM > 0 \\ \Phi M > 0 \end{cases} \quad \leftrightarrow \quad \text{Hệ thống ổn định}$$

Ví dụ: Cho hệ thống hồi tiếp âm đơn vị, biết rằng hệ hở có biểu đồ Bode như hình vẽ. Xác định độ dự trữ biên, độ dự trữ pha của hệ thống hở. Hỏi hệ kín có ổn định không?

Theo biểu đồ Bode:



$\omega_c = 5$

$\omega_{-\pi} = 2$

$L(\omega_{-\pi}) = 35dB$

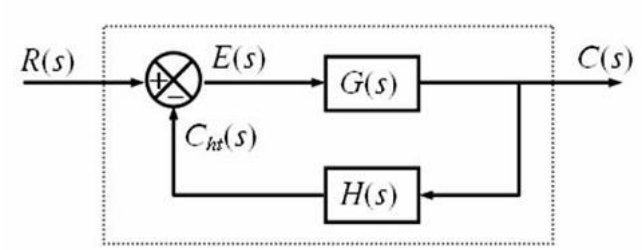
$\varphi(\omega_c) = -270^0$

$GM = 35dB$

$\Phi M = 180^0 - 270^0 = -90^0$

Do $GM < 0$ và $FM < 0$ nên hệ thống kín không ổn định.

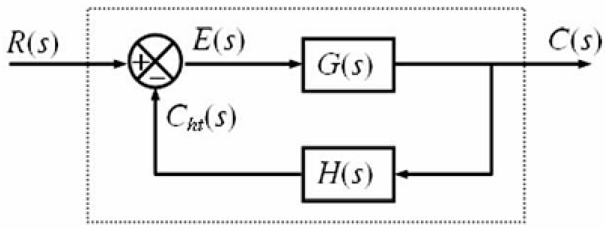
Chú ý: Trường hợp hệ thống hồi tiếp âm như hình vẽ, vẫn có thể áp dụng tiêu chuẩn ổn định Nyquist hoặc Bode, trong trường hợp này hàm truyền hở là G(s)H(s).

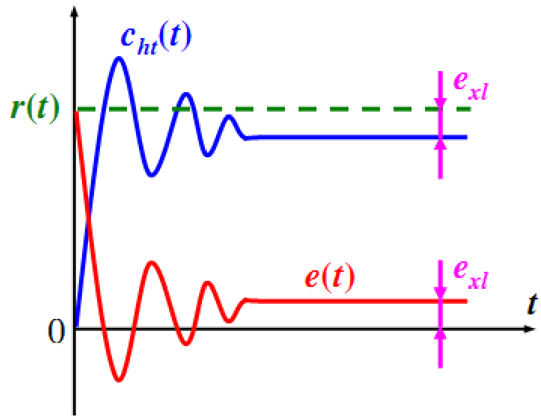


CHƯƠNG 4: ĐÁNH GIÁ CHẤT LƯỢNG HỆ THỐNG ĐIỀU KHIỂN

4.1. Các tiêu chuẩn chất lượng

4.1.1. Sai số





Sai số: là sai lệch giữa tín hiệu đặt và tín hiệu hồi tiếp.

$$e(t) = r(t) - c_{ht}(t) \qquad \leftrightarrow \qquad E(s) = R(s) - C_{ht}(s)$$

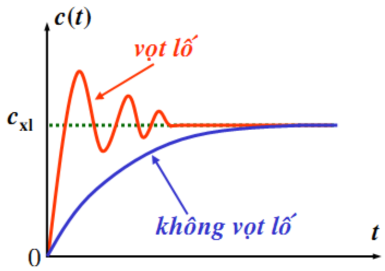
Sai số xác lập: là sai số của hệ thống khi thời gian tiến đến vô cùng.

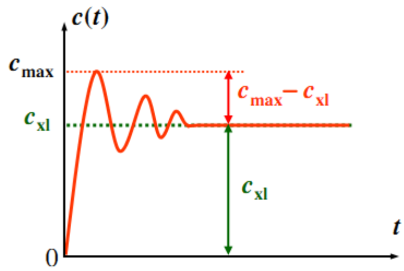
$$e_{xl} = \lim_{t \to \infty} e(t) \qquad \leftrightarrow \qquad e_{xl} = \lim_{s \to 0} sE(s)$$

4.1.2. Đáp ứng quá độ:

Độ vượt quá

Hiện tượng vượt quá: là hiện tượng đáp ứng của hệ thống vượt quá giá trị xác lập của nó.





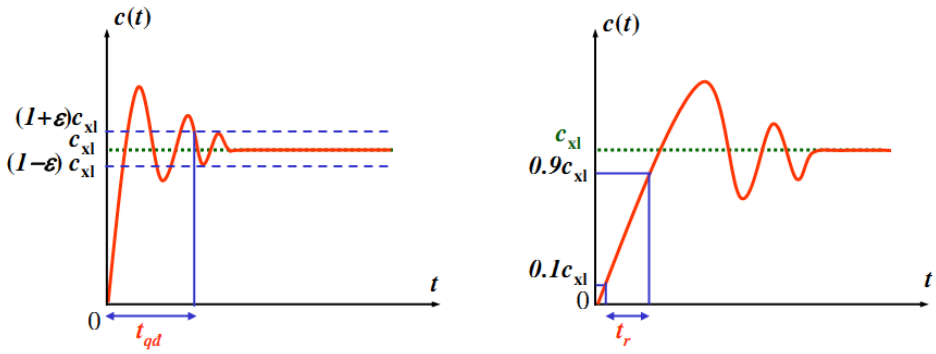
Độ vượt quá: (Percent of Overshoot – POT) là đại lượng đánh giá mức độ vượt quá của hệ thống, được tính bằng công thức:

$$POT = \frac{c_{\max} - c_{xl}}{c_{xl}} 100\%$$

Thời gian quá độ – Thời gian lên

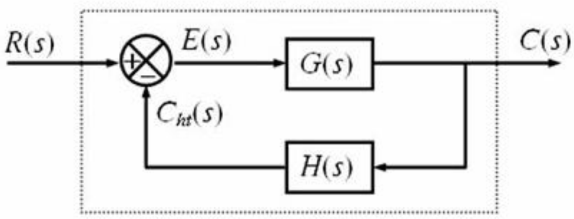
Thời gian quá độ ($t_{qđ}$): là thời gian cần thiết để sai lệch giữa đáp ứng của hệ thống và giá trị xác lập của nó không vượt quá e%, thường chọn là 2% (0.02) hoặc 5% (0.05)

Thời gian lên (t_r): là thời gian cần thiết để đáp ứng của hệ thống tăng từ 10% đến 90% giá trị xác lập của nó.



4.2. Sai số xác lập

4.2.1. Biểu thức sai số xác lập



Ta có: $$E(s) = \frac{R(s)}{1+G(s)H(s)}$$

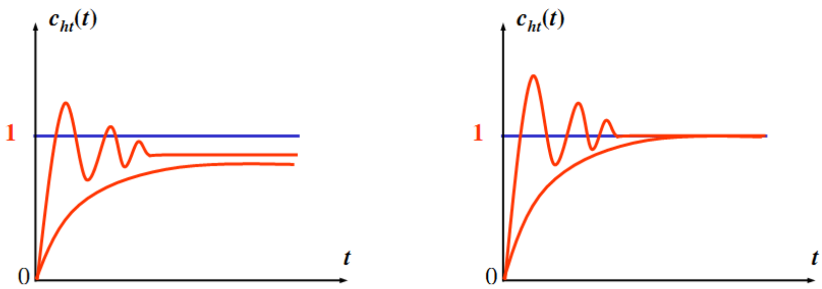
Suy ra: $$e_{xl} = \lim_{s \to 0} sE(s) = \lim_{s \to 0} \frac{sR(s)}{1+G(s)H(s)}$$

Nhận xét: sai số xác lập không chỉ phụ thuộc vào cấu trúc và thông số của hệ thống mà còn phụ thuộc vào tín hiệu vào.

4.2.2. Sai số xác lập khi tín hiệu vào là hàm nấc

Nếu tín hiệu vào là hàm nấc đơn vị: $R(s) = \frac{1}{s}$

$$e_{xl} = \frac{1}{1+K_p} \quad \text{với} \quad K_p = \lim_{s \to 0} G(s)H(s)$$ - hệ số vị trí



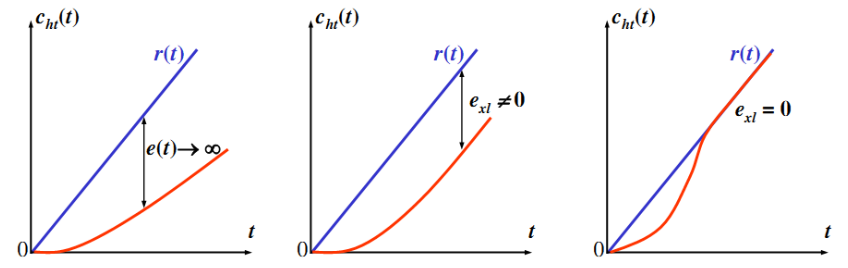
a) G(s)H(s) không có khâu tích phân lý tưởng

b) G(s)H(s) có ít nhất 1 khâu tích phân lý tưởng

4.2.3. Sai số xác lập khi tín hiệu vào là hàm dốc

Nếu tín hiệu vào là hàm dốc: $G(s)=\dfrac{1}{s^2}$

Sai số xác lập: $e_{xl}=\dfrac{1}{1+K_v}$ với $K_v=\lim\limits_{s\to 0} G(s)H(s)$ - hệ số vận tốc



b) c)

a) G(s)H(s) không có khâu tích phân lý tưởng

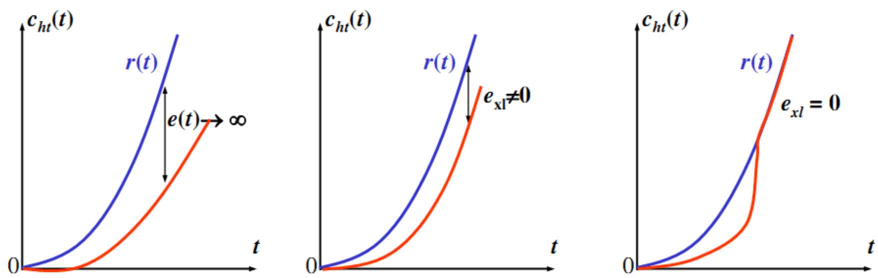
b) G(s)H(s) có một khâu tích phân lý tưởng

c) G(s)H(s) có nhiều hơn một khâu tích phân lý tưởng

4.2.4. Sai số xác lập khi tín hiệu vào là hàm parabol

Tín hiệu vào là hàm parabol: $G(s)=\dfrac{1}{s^3}$

Sai số xác lập: $e_{xl}=\dfrac{1}{1+K_a}$ với $K_a=\lim\limits_{s\to 0} G(s)H(s)$ - hệ số gia tốc



a) b) c)

a) G(s)H(s) có ít hơn 2 khâu TPLT

b) G(s)H(s) có 2 khâu TPLT

c) G(s)H(s) có nhiều hơn 2 khâu TPLT

4.2.5. Mối liên hệ giữa số khâu tích phân trong G(s)H(s) và sai số xác lập

Tùy theo số khâu tích phân lý tưởng có trong hàm truyền G(s)H(s) mà các hệ số K_p, K_v, K_a có giá trị như sau:

Số khâu tích phân trong $G(s)H(s)$	Hệ số vị trí K_p	Hệ số vận tốc K_v	Hệ số gia tốc K_a
0	$K_p < \infty$	0	0
1	∞	$K_v < \infty$	0
2	∞	∞	$K_a < \infty$
>3	∞	∞	∞

Nhận xét:

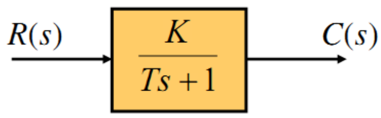
+ Muốn e_{xl} của hệ thống đối với tín hiệu vào là hàm nấc bằng 0 thì hàm truyền G(s)H(s) phải có ít nhất 1 khâu tích phân lý tưởng.

+ Muốn e_{xl} của hệ thống đối với tín hiệu vào là hàm dốc bằng 0 thì hàm truyền G(s)H(s) phải có ít nhất 2 khâu tích phân lý tưởng.

+ Muốn e_{xl} của hệ thống đối với tín hiệu vào là hàm parabol bằng 0 thì hàm truyền G(s)H(s) phải có ít nhất 3 khâu tích phân lý tưởng.

4.3. Đáp ứng quá độ

4.3.1. Hệ quán tính bậc 1

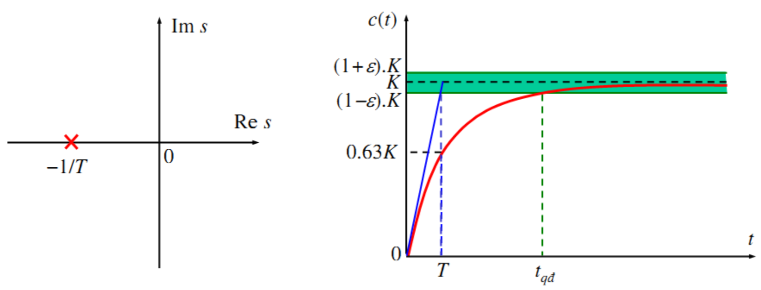


Hàm truyền hệ quán tính bậc 1: $G(s) = \dfrac{K}{Ts+1}$

Hệ quán tính bậc 1 có một cực thực: $p_1 = -\dfrac{1}{T}$

Đáp ứng quá độ: $C(s) = R(s)G(s) = \dfrac{1}{s}\dfrac{K}{Ts+1}$

$$\rightarrow c(t) = K(1 - e^{-\frac{t}{T}})$$



a) Giản đồ cực –zero của khâu quán tính bậc 1

b) Đáp ứng quá độ của khâu quán tính bậc 1 tăng theo qui luật hàm mũ

$$c(t) = K(1 - e^{-\frac{t}{T}})$$

Nhận xét về hệ quán tính bậc 1:

Hệ quán tính bậc 1 chỉ có 1 cực thực (-1/T), đáp ứng quá độ không có vượt quá.

Thời hằng T: là thời điểm đáp ứng của khâu quán tính bậc 1 đạt 63% giá trị xác lập.

Cực thực (-1/T) càng nằm xa trục ảo thì thời hằng T càng nhỏ, hệ thống đáp ứng càng nhanh.

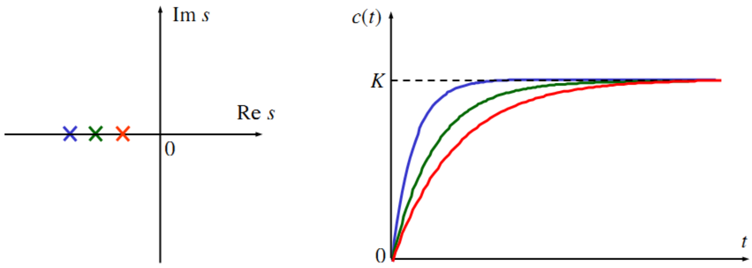
Thời gian quá độ của hệ quán tính bậc 1 là:

$$t_{qd} = T \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

với ε = 0,02 (tiêu chuẩn 2%) hoặc ε = 0,05 (tiêu chuẩn 5%)

Quan hệ giữa vị trí cực và đáp ứng hệ quán tính bậc 1

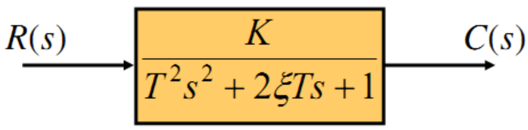
Cực nằm càng xa trục ảo đáp ứng của hệ quán tính bậc 1 càng nhanh, thời gian quá độ càng ngắn.



Giản đồ cực –zero của khâu quán tính bậc 1

Đáp ứng quá độ của khâu quán tính bậc 1

4.3.2. Hệ dao động bậc 2



Hàm truyền hệ dao động bậc 2:

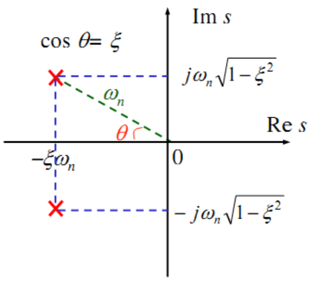
$$G(S) = \frac{K}{T^2s^2 + 2\xi Ts + 1} = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \text{ với } \omega_n = \frac{1}{T}, 0 < \xi < 1$$

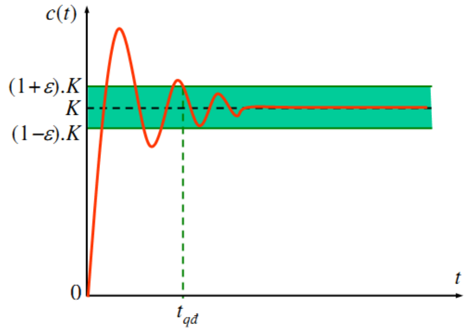
Hệ dao động bậc 2 có cặp cực phức:

$$p_{1,2} = \xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

Đáp ứng quá độ: $C(s) = R(s)G(s) = \frac{1}{s}\frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$

$$\rightarrow \quad c(t) = K\left\{1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin(\sqrt{1-\xi^2}.\omega_n t + \theta)\right\}$$





Giản đồ cực –zero của khâu dao động bậc 2

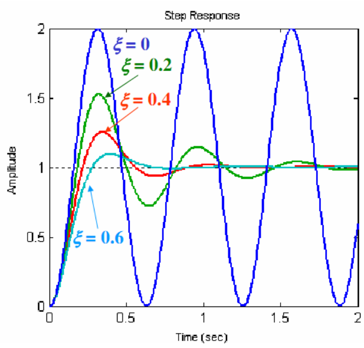
Đáp ứng quá độ của khâu dao động bậc 2

Nhận xét về hệ dao động bậc 2

Hệ dao động bậc 2 có cặp cực phức, đáp ứng quá độ có dạng dao động với biên độ giảm dần.

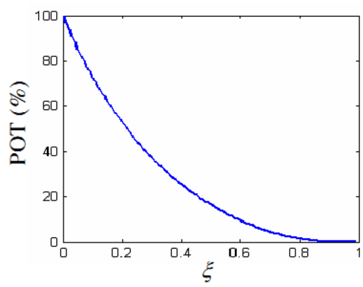
Nếu $\xi = 0$, đáp ứng của hệ là dao động không suy giảm với tần số $\omega_n \rightarrow \omega_n$ gọi là tần số dao động tự nhiên.

Nếu $0 < \zeta < 1$, đáp ứng của hệ là dao động với biên độ giảm dần $\rightarrow \xi$ gọi là hệ số tắt (hay hệ số suy giảm), ξ càng lớn (cực càng nằm gần trục thực) dao động suy giảm càng nhanh.



Đáp ứng quá độ của hệ dao động bậc 2 có vượt quá.

$$POT = \exp\left(-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right).100\%$$



Quan hệ giữa hệ số tắt và độ vượt quá

ξ càng lớn (cặp cực càng nằm gần trục thực) POT càng nhỏ

ξ càng nhỏ (cặp cực phức càng nằm gần trục ảo) POT càng lớn

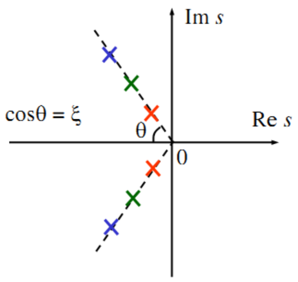
Thời gian quá độ:

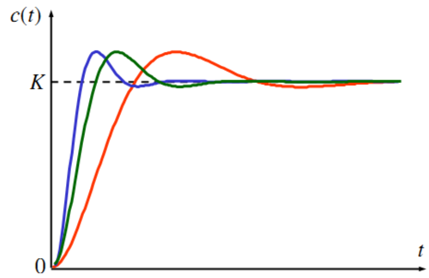
Tiêu chuẩn 5%: $t_{qđ} = \dfrac{3}{\xi\omega_n}$

Tiêu chuẩn 2%: $t_{qđ} = \dfrac{4}{\xi\omega_n}$

Quan hệ giữa vị trí cực và đáp ứng hệ dao động bậc 2

Các hệ dao động bậc 2 có các cực nằm trên cùng 1 tia xuất phát từ góc tọa độ thì có hệ số tắt bằng nhau, do đó có độ vọt lố bằng nhau. Hệ nào có cực nằm xa gốc tọa độ hơn thì có tần số dao động tự nhiên lớn hơn, do đó thời gian quá độ ngắn hơn.



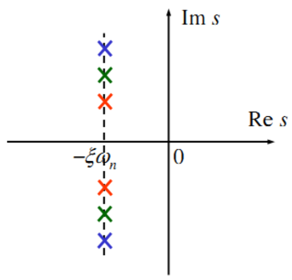


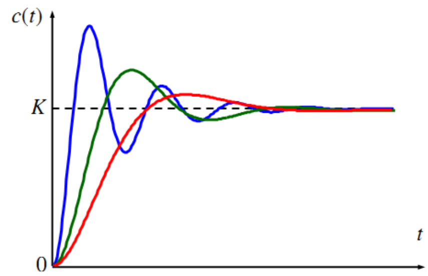
Giản đồ cực –zero của khâu dao động bậc 2

Đáp ứng quá độ của khâu dao động bậc 2

Quan hệ giữa vị trí cực và đáp ứng hệ dao động bậc 2

Các hệ dao động bậc 2 có các cực nằm cách trục ảo một khoảng bằng nhau thì có $\xi\omega_n$ bằng nhau, do đó thời gian quá độ bằng nhau. Hệ nào có cực nằm xa trục thực hơn thì có hệ số tắt nhỏ hơn, do đó độ vọt lố cao hơn.





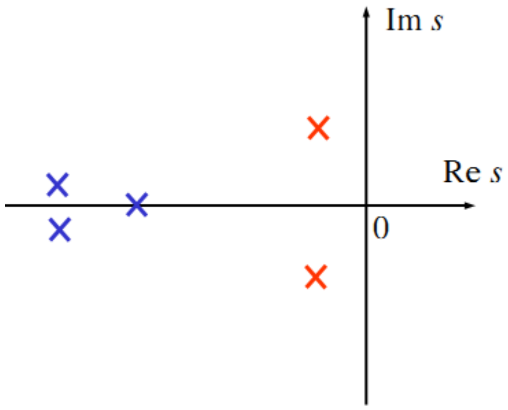
Giản đồ cực –zero của khâu dao động bậc 2

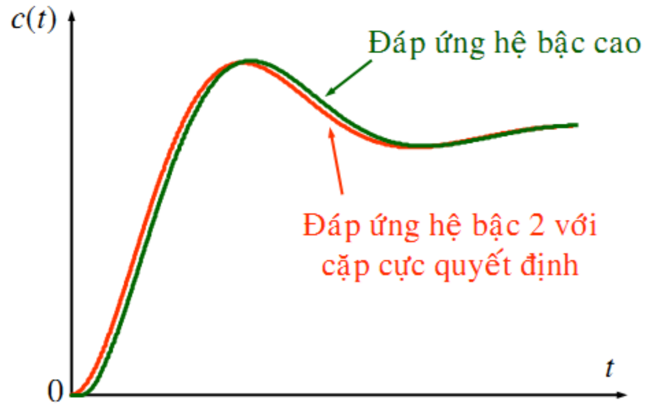
Đáp ứng quá độ của khâu dao động bậc 2

Hệ bậc cao

Hệ bậc cao có nhiều hơn 2 cực

Nếu hệ bậc cao có 1 cặp cực phức nằm gần trục ảo hơn so với các cực còn lại thì có thể xấp xỉ hệ bậc cao về hệ bậc 2. Cặp cực phức nằm gần trục ảo nhất gọi là cặp cực quyết định của hệ bậc cao.





Hệ bậc cao có nhiều hơn 2 cực

Hệ bậc cao có thể xấp xỉ về hệ bậc 2 với cặp cực quyết định

4.4. Các tiêu chuẩn tối ưu hóa đáp ứng quá độ

- Tiêu chuẩn IAE

(Integral of the Absolute Magnitude of the Error)

$$J_{IAE} = \int_0^{\infty} |e(t)| dt$$

- Tiêu chuẩn ISE

(Integral of the Square of the Error)

$$J_{ISE} = \int_0^{\infty} e^2(t) dt$$

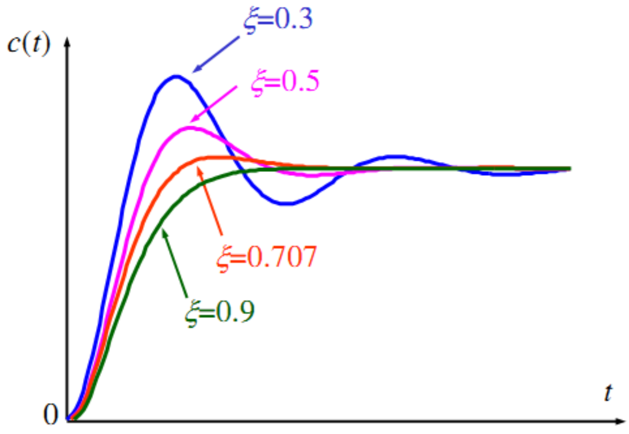
- Tiêu chuẩn ITAE

(Integral of Time multiplied by the Absolute Value of the Error)

$$J_{ITAE} = \int_0^{\infty} t|e(t)| dt$$

Hệ bậc 2:

J_{IAE}	$\rightarrow$ min	khi $\xi \rightarrow 0{,}707$
J_{ISE}	$\rightarrow$ min	khi $\xi \rightarrow 0{,}5$
J_{ITAE}	$\rightarrow$ min	khi $\xi \rightarrow 0{,}707$



Đáp ứng của hệ bậc 2

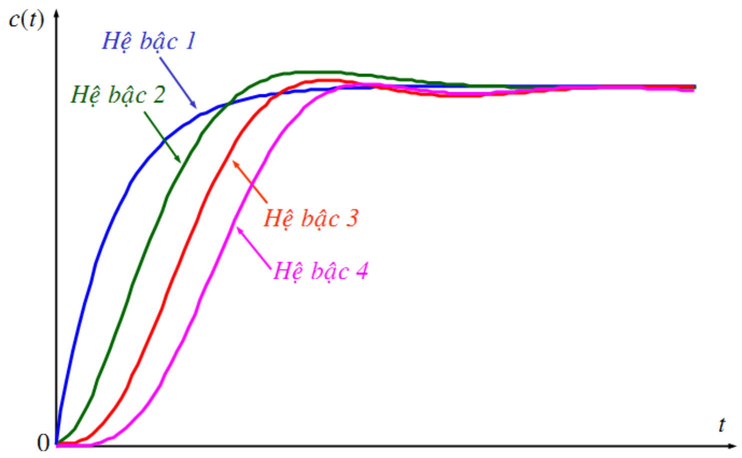
Tiêu chuẩn ITAE được sử dụng phổ biến nhất

Để đáp ứng quá độ của hệ thống bậc n là tối ưu theo chuẩn ITAE thì mẫu số hàm truyền kín hệ bậc n phải có dạng

Bậc	Mẫu số hàm truyền
1	$s+\omega_n$
2	$s^2+1{,}414\omega_n s+\omega_n^2$
3	$s^3+1{,}75\omega_n s^2+2{,}15\omega_n^2 s+\omega_n^3$
4	$s^4+2{,}1\omega_n s^3+3{,}4\omega_n^2 s^2+2{,}7\omega_n^3 s+\omega_n^4$

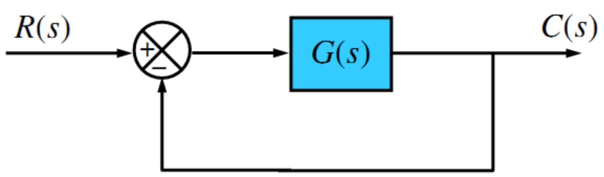
Nếu mẫu số hàm truyền hệ kín có dạng như bảng trên và tử số hàm truyền hệ kín của hệ bậc n là thì đáp ứng quá độ của hệ thống là tối ưu và sai số xác lập bằng 0.

Đáp ứng tối ưu theo chuẩn ITAE



4.5. Quan hệ giữa chất lượng trong miền tần số và chất lượng trong miền thời gian

- Quan hệ giữa đặc tính tần số và sai số xác lập



Hệ hở có biên độ ở miền tần số thấp càng cao thì hệ kín có sai số xác lập càng nhỏ.

Trường hợp đặc biệt nếu hệ hở có biên độ ở tần số thấp vô cùng lớn thì hệ kín có sai số xác lập bằng 0 đối với tín hiệu vào là hàm nấc.

Sai số xác lập của hệ kín chỉ phụ thuộc vào biên độ ở miền tần số thấp của hệ hở, không phụ thuộc vào biên độ ở miền tần số cao.

Hệ hở có độ dự trữ pha của càng cao thì hệ kín có độ vọt lố càng thấp. Các nghiên cứu thực nghiệm cho thấy độ dữ trữ pha của hệ hở lớn hơn 600 thì độ vọt lố của hệ kín nhỏ hơn 10%.

Hệ hở có tần số cắt biên càng cao thì hệ kín có băng thông càng rộng ? hệ thống kín đáp ứng càng nhanh, thời gian quá độ càng nhỏ. (Chú ý băng thông của hệ kín xấp xỉ tần số cắt biên của hệ hở)